

Borel, Émile Félix Édouard
Justin
Méthodes et problèmes de
théorie des fonctions

COLLECTION DE MONOGRAPHIES SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS
PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION DE M. ÉMILE BOREL

MÉTHODES ET PROBLÈMES

DE

THÉORIE DES FONCTIONS

PAR

ÉMILE BOREL
MEMBRE DE L'INSTITUT



PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES ET DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
55, Quai des Grands-Augustins

1922

MÉTHODES ET PROBLÈMES

DE

THÉORIE DES FONCTIONS

COLLECTION DE MONOGRAPHIES SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS
PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION DE M. ÉMILE BOREL

MÉTHODES ET PROBLÈMES

DE

THÉORIE DES FONCTIONS

PAR

ÉMILE BOREL



PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES ET DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
55, Quai des Grands-Augustins

1922

PRÉFACE.

Le développement extraordinaire pris par les sciences depuis un siècle rend actuellement à peu près impossible au cerveau humain de connaître, non pas même la Science tout entière, mais une science particulière, telle que la mathématique. On peut prévoir que, dans quelques dizaines d'années, la spécialisation nécessaire sera encore plus étroite et que, à part quelques génies exceptionnels de plus en plus rares, la plupart des savants se confineront dans une fraction relativement très faible du champ immense de la Science. Il y a là un danger très grand, car les sciences les plus diverses ont entre elles des rapports utiles, et ces rapports sont encore plus nécessaires entre des branches d'une même science ; on sait tout ce que, au XIXe siècle, la géométrie, par exemple, a dû à la théorie des fonctions d'une variable complexe.

Il faut donc se convaincre qu'il est indispensable de simplifier et systématiser les résultats acquis dans une discipline, en vue d'en permettre l'acquisition plus aisée à ceux qui cultivent des disciplines différentes. Les efforts faits dans ce but, les traités généraux et les monographies spéciales sont au moins aussi utiles à la Science que les travaux originaux [1]. Bien entendu, il ne peut s'agir de contester la primauté de la grande découverte, vraiment neuve, sur n'importe quel travail didactique ; mais de telles découvertes sont rares et les travaux originaux, en mathématiques comme dans les sciences expérimentales, sont le plus souvent des contributions au développement d'une idée déjà acquise ; de telles contributions

---

[1] Parmi les ouvrages destinés à simplifier et moderniser l'exposition des éléments de l'analyse, il faut citer un livre trop peu connu de M. René Baire : *Leçons sur les théories générales de l'analyse* (Gauthier-Villars).

sont sans doute nécessaires; pour reprendre une comparaison devenue banale, ce sont les matériaux avec lesquels sont construits les édifices superbes que sont les théories; mais ces matériaux n'ont en soi qu'une faible valeur; il vaudront par l'architecte qui les mettra en œuvre; et cette mise en œuvre sera grandement facilitée s'ils sont classés, rangés, étiquetés, de manière qu'il soit aisé de les connaître et de les avoir sous la main. La besogne de celui qui les classe n'est pas inférieure à celle de celui qui les amasse sans discernement: les recueils de Mémoires originaux sont si nombreux que l'on peut affirmer sans exagération qu'un Mémoire dont les résultats n'ont pas été, au bout de quelques dizaines d'années au plus, recueillis ou résumés dans un Ouvrage d'ensemble a les plus grandes chances de rester éternellement ignoré. Si le résultat qu'il renferme devient par la suite utile au développement de la Science, il sera sans doute retrouvé d'une manière indépendante par quelque chercheur; car il est souvent plus court de faire un calcul ou une expérience que d'entreprendre une recherche bibliographique. Les compilations bibliographiques exécutées sans esprit critique, si elles ne sont pas entièrement inutiles, sont souvent d'un très médiocre secours dans une telle recherche. Elles ne peuvent d'ailleurs en aucun cas rendre les services que l'on doit attendre d'un véritable Traité, lequel remplace effectivement, pour le plus grand nombre des lecteurs, une masse considérable de travaux antérieurs, et facilite singulièrement la lecture de beaucoup d'autres.

Lorsque j'ai entrepris, il y a vingt-cinq ans, cette Collection de monographies sur la théorie des fonctions, je pensais qu'après avoir écrit quelques petits livres, il me serait possible de songer à rédiger un véritable Traité de théorie des fonctions. Mais les travaux originaux ont été extrêmement nombreux, beaucoup d'entre eux étant très importants et cet essor de la théorie des fonctions ne paraît pas près de s'arrêter. Il était donc impossible de songer à fixer des théories sans cesse en progrès; il valait mieux chercher à contribuer à ce progrès en résumant au fur et à mesure, dans ces monographies, les derniers résultats obtenus et en indiquant les direc-

tions dans lesquelles pouvaient s'engager les chercheurs. C'est ce que j'ai essayé de faire dans cette Collection ; j'y ai été puissamment aidé, on le sait, par de nombreux collaborateurs, auxquels je suis heureux d'avoir aujourd'hui l'occasion d'adresser mes remerciements pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant de s'associer, en pleine indépendance, à l'œuvre que j'avais entreprise et qui était trop lourde pour un seul auteur. Beaucoup d'entre eux, d'ailleurs, avaient apporté aux théories qu'ils ont exposées des contributions personnelles d'une telle importance, que c'est par eux, et non par un autre, qu'elles devaient être traitées. Grâce à eux, cette Collection a pu embrasser toutes les parties les plus importantes et les plus vivantes de la théorie moderne des fonctions, tant d'une variable réelle que d'une variable complexe ; j'espère que de nouveaux collaborateurs ne tarderont pas à combler les lacunes qui subsistent forcément : car la Science ne s'arrête pas.

Peut-être serait-il possible d'entreprendre aujourd'hui la publication du Traité qui systématiserait et résumerait les parties essentielles des 25 volumes de la Collection ; je crois cependant que, pour bien des questions encore en voie d'évolution, il vaut mieux conserver la forme plus souple d'une telle Collection d'ouvrages séparés dont il est plus aisé de renouveler ou de compléter, au fur et à mesure des nécessités, les parties qui se trouvent avoir vieilli, en raison même de l'action qu'elles ont exercée. Je laisse donc à de plus jeunes le soin d'écrire ce Traité, dont l'heure viendra bientôt. La théorie des fonctions a toujours été, d'ailleurs, une science de jeunes, et il est probable qu'elle le restera, car les qualités d'imagination abstraite qu'elle exige paraissent être le privilège de la jeunesse, tandis que les parties des mathématiques qui touchent aux applications et aux réalités exigent peut-être plus de maturité d'esprit.

Cet Ouvrage, qui est le neuvième publié sous ma signature dans cette Collection, sera donc vraisemblablement mon dernier livre de théorie des fonctions ; j'y ai rassemblé un certain nombre de Notes et de Mémoires qui n'avaient pas trouvé place dans les

Ouvrages antérieurs et dont certains me paraissent cependant pouvoir être le point de départ de recherches nouvelles. Je les ai fait précéder d'une courte *Introduction* où j'ai indiqué de quelle utilité peuvent être les comparaisons et le langage de la biologie en théorie des fonctions.

Dans une brève conclusion, je signale quelques-unes des questions qui me semblent devoir être étudiées, sinon résolues ; elles sont difficiles ; mais il est rare que les efforts tentés pour résoudre une question difficile soient entièrement vains ; s'ils ne conduisent pas à la solution de la question, ils ouvrent d'autres voies, parfois plus intéressantes encore.

ÉMILE BOREL.

(Paris, octobre 1921.)

Dans les renvois, les Ouvrages de la Collection de monographies sont désignés par des chiffres gras, qui correspondent à la liste ci-dessous, où ils sont classés, pour chaque auteur, d'après l'ordre chronologique de la première édition, les auteurs étant classés eux-mêmes d'après l'ordre chronologique de l'apparition de leur premier ouvrage.

(**1**) ÉMILE BOREL. — *Leçons sur la théorie des fonctions* (2e édition, 1914).
(**2**) — *Leçons sur les fonctions entières* (2e édition, 1921, avec une Note de G. Valiron).
(**3**) — *Leçons sur les séries divergentes*, 1901.
(**4**) — *Leçons sur les séries à termes positifs* (rédigées par R. d'Adhémar, 1902).
(**5**) — *Leçons sur les fonctions méromorphes* (rédigées par L. Zoretti, 1903).
(**6**) — *Leçons sur les variables réelles et les développements en séries de polynomes* (rédigées par M. Fréchet, avec des Notes de Paul Painlevé et Henri Lebesgue, 1905).
(**7**) — *Leçons sur la théorie de la croissance* (rédigées par A. Denjoy, 1910).
(**8**) — *Leçons sur les fonctions monogènes uniformes d'une variable complexe* (rédigées par G. Julia, 1917).
(**9**) — *Méthodes et problèmes de théorie des fonctions*, 1922.
(**10**) HENRI LEBESGUE. — *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, 1904.
(**11**) — *Leçons sur les séries trigonométriques*, 1906.
(**12**) RENÉ BAIRE. — *Leçons sur les fonctions discontinues* (rédigées par A. Denjoy, 1905)

(13) E. Lindelöf. — *Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions*, 1905.

(14) P. Boutroux. — *Leçons sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre* (avec une Note de P. Painlevé, 1908).

(15) O. Blumenthal. — *Principes de la théorie des fonctions entières d'ordre infini*, 1910.

(16) Paul Montel. — *Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe*, 1910.

(17) L. Zoretti. — *Leçons sur le prolongement analytique*, 1910.

(18) Vito Volterra. — *Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles* (rédigées par M. Tomasetti et F.-S. Zarlatti, 1912).

(19) — *Leçons sur les fonctions de lignes et leurs applications* (rédigées par J. Pérès, 1913).

(20) F. Riesz. — *Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues*, 1913.

(21) M. Bôcher. — *Leçons sur les méthodes de Sturm dans la théorie des équations différentielles linéaires et leurs développements modernes*, 1913.

(22) Dienes. — *Leçons sur les singularités des fonctions analytiques*, 1913.

(23) de la Vallée Poussin. — *Intégrales de Lebesgue, fonctions d'ensemble, classes de Baire*, 1916.

(24) — *Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle*, 1919.

(25) Georges Giraud. — *Leçons sur les fonctions automorphes*, 1920.

(26) Paul Lévy. — *Leçons d'analyse fonctionnelle* (préface de J. Hadamard, 1922).

INDEX.

MÉTHODES ET PROBLÈMES

DE

THÉORIE DES FONCTIONS

INTRODUCTION.

Les mathématiques ont été, aussi loin que l'on peut remonter dans l'histoire des civilisations, cultivées à la fois pour leur utilité et pour leur beauté. Il est bien connu que des recherches faites uniquement pour la satisfaction esthétique d'un petit nombre d'esprits se sont trouvées au bout de quelques années, ou parfois de quelques siècles, rendre des services éminents dans les applications. Néanmoins, il reste toujours, même parmi les mathématiciens, des esprits pour contester la légitimité ou l'intérêt de certaines spéculations qui leur paraissent trop abstraites (¹).

Il y a, entre les adeptes de la théorie des fonctions et ceux qui cultivent la Mécanique ou l'Astronomie, une querelle au fond analogue à celle des médecins ou des agronomes avec les biologistes purs. Il n'est peut-être pas inutile d'insister un peu sur cette comparaison; cela nous facilitera l'exposition de quelques réflexions sur le but et les tendances de la théorie des fonctions.

Toute comparaison est défectueuse; mais, lorsqu'on en connaît les défauts, la comparaison est souvent instructive; elle a surtout le précieux avantage de permettre de résumer en quelques mots des suggestions dont le développement exigerait de longs discours;

(¹) On pourra lire avec intérêt, à ce sujet, le discours inaugural de M. Denjoy dans sa chaire de théorie des fonctions de l'Université d'Utrecht : *L'orientation actuelle des mathématiques* (*Revue du Mois*, 1919).

les analogies de la théorie des fonctions avec la biologie ne peuvent avoir que la valeur d'une comparaison.

Ces analogies sont frappantes et ont conduit depuis longtemps à des formes de langage caractéristique : fonctions *engendrées* par tel ou tel procédé; *familles* de fonctions; *pathologie* des fonctions; etc. : mais peut-être n'a-t-on jamais essayé de les exposer d'une manière systématique. Je voudrais tenter brièvement d'esquisser un tel essai, sans m'en dissimuler les difficultés; s'il intéresse quelques lecteurs, j'espère qu'ils ne me ménageront pas leurs critiques et me permettront ainsi de le perfectionner.

Si l'on s'élève du simple au complexe, on peut distinguer dans la biologie, d'abord la cytologie et l'anatomie, étude des éléments constitutifs des êtres vivants, puis la morphologie et la physiologie, qui étudient les relations apparentes ou cachées des divers organes et leur fonctionnement, enfin la sociologie au sens le plus large, consacrée aux relations de ces êtres entre eux (par exemple, l'étude des mœurs des fourmis ou des abeilles). Au delà encore, on trouve les théories générales sur l'origine et l'évolution des espèces.

Ce n'est pas suivant cette ligne théorique que se sont développées les connaissances biologiques ; la morphologie a précédé la cytologie. En fait, l'homme primitif et, encore de nos jours, les hommes peu instruits ou les peuples peu civilisés, se bornent à savoir distinguer et utiliser pour un profit immédiat quelques espèces animales et végétales : le cheval, le bœuf, le mouton, le blé, la vigne, l'olivier. Tel fut le cas des premiers algébristes et analystes; tel est encore aujourd'hui le cas de tous ceux qui n'ont besoin que des éléments en vue des applications; les fonctions algébriques des quatre premiers degrés, les fonctions circulaires, la fonction exponentielle (d'où dérivent les logarithmes) sont pour eux comme ces animaux et ces plantes domestiques indispensables à la civilisation humaine, sans qu'il soit d'ailleurs nécessaire, pour les utiliser, de connaître l'anatomie ni la physiologie. Il est long et difficile de créer de nouvelles espèces domestiques : les fonctions elliptiques ne se laissent pas non plus facilement apprivoiser.

Avant d'aller plus loin, signalons tout de suite une différence plus apparente que réelle entre les individus qui appartiennent à une même espèce biologique et les individus qui appartiennent à

une catégorie déterminée de fonctions : le nombre des grains de blé, par exemple, est limité, tandis que le nombre des trinomes du second degré est illimité. Cette différence est, dis-je, plus apparente que réelle ; elle disparaît, en effet, si dans un cas, comme dans l'autre, on fait la distinction nécessaire entre les êtres qui peuvent être conçus et ceux qui sont effectivement réalisés. Rien ne limite, en effet, le nombre des grains de blé que l'homme pourra produire, sinon la durée même de l'espèce humaine et du globe terrestre ; mais cependant le nombre des grains de blé actuellement existants est fini. Il en est exactement de même pour les trinomes de second degré ; il en est une infinité de possibles ; mais chacun d'eux ne devient réel que le jour où un mathématicien l'écrit ou pense à lui ; comme le nombre des mathématiciens est fini et que le nombre des pensées de chacun d'eux l'est également, il n'est pas douteux que le nombre des trinomes du second degré qui ont été effectivement écrits ou pensés, est fini et est même probablement très inférieur au nombre des grains de blé récoltés chaque année. Bien entendu, l'algébriste et l'analyste étudient des propriétés communes à tous les trinomes réels et possibles, sans qu'il soit nécessaire pour eux de penser à chaque instant à un trinome déterminé ; de même l'agriculteur le moins instruit pense souvent au blé en général, sans se représenter un grain bien déterminé, car il sait que tous les grains ont des propriétés analogues. Par contre, il y a une différence évidente et inévitable : les êtres idéaux que sont les fonctions ne sont pas limités dans l'espace et dans le temps ; une fonction bien déterminée peut être considérée simultanément en deux lieux différents ; elle peut aussi être considérée à des intervalles de temps aussi grands que l'on veut.

L'homme a été rapidement poussé à la fois par la nécessité et par sa curiosité naturelle à étendre ses connaissances biologiques au delà des rudiments indispensables à la vie agricole ; d'une part, il a catalogué et classé des espèces de plus en plus nombreuses ; d'autre part, il s'est attaché à perfectionner les espèces qu'il utilisait, à créer des variétés nouvelles, et enfin il a étudié le fonctionnement normal et pathologique de ces diverses espèces animales et végétales ; il les a disséquées, est arrivé à connaître leur fonctionnement général, la circulation du sang ou de la sève, etc.,

et aussi leur structure intime, leur composant élémentaire, la cellule, qui est étudiée elle-même d'une manière de plus en plus approfondie.

L'étude des fonctions s'est de même développée à la fois en surface et en profondeur; on a appris à connaître des fonctions de plus en plus nombreuses et, d'autre part, on a approfondi l'étude des fonctions connues; on les a disséquées, on a scruté avec une acuité toujours plus grande la substance même de la fonction, c'est-à-dire la variable continue; d'autre part, on a soumis les fonctions à des opérations d'ordre général, développements en séries, dérivation, intégration, etc., vis-à-vis desquels elles réagissent comme réagissent les animaux et les plantes vis-à-vis de certains traitements que leur font subir les expérimentateurs.

On pourrait pousser plus loin la comparaison et constater dans la théorie des fonctions des cas de symbiose et de parasitisme; on pourrait distinguer les êtres qui résultent de l'évolution naturelle de monstruosités produites artificiellement; mais il est inutile d'aller plus loin pour se rendre compte que le langage de la comparaison biologique peut permettre d'exposer avec plus de brièveté et une clarté suffisante des idées générales sur la théorie des fonctions; il est donc permis de l'utiliser, à condition de n'y voir jamais qu'une forme de langage, destiné à suggérer au lecteur des idées qu'il serait difficile de suggérer autrement.

CHAPITRE I.

LES DOMAINES ET LA THÉORIE DES ENSEMBLES.

Généralités.

Les domaines et les ensembles sont aux fonctions ce que les tissus sont aux êtres vivants. On a été naturellement conduit à les étudier en eux-mêmes, indépendamment des fonctions qui en avaient suggéré l'étude. Ce chapitre préliminaire de la théorie des fonctions a pris une grande importance : de même que l'étude des tissus vivants a conduit peu à peu à étudier des diastases et des colloïdes, que la biologie a conduit à la Chimie-Physique, de même certains analystes ont étudié les ensembles d'une manière de plus en plus abstraite, les relations qu'ils peuvent avoir entre eux se trouvant réduites à un très petit nombre de relations fondamentales, qui se confondent avec les opérations de la logique. Quelques mathématiciens se demandent si l'on ne sort pas ainsi du domaine des mathématiques; l'avenir seul en décidera ; en attendant, on doit constater l'intérêt pris à ces questions par des esprits forts distingués; un recueil important, *Fundamenta mathematicæ*, a été consacré à ces recherches par une école de mathématiciens polonais; c'est une tentative qui mérite d'être suivie avec soin et avec sympathie, même si l'on pense que le résultat final de ces recherches sera de fournir de nouvelles raisons pour s'intéresser surtout aux ensembles qui peuvent être effectivement définis. Les principes de la théorie des ensembles ont été exposés et discutés dans plusieurs des volumes de la Collection, tout d'abord dans (**1**), et aussi dans certains chapitres de (**6**), (**10**), (**12**), (**23**), (**24**), (**26**). On y revient ci-après, à propos de la classification des ensembles de mesure nulle. J'ai tout d'abord reproduit ici quelques Notes publiées dans les *Comptes rendus*, Notes qui

marquent quelques étapes entre la première et la deuxième édition de mes *Leçons sur la théorie des fonctions* (¹).

Sur la représentation effective de certaines fonctions discontinues, comme limites de fonctions continues (²).

On doit à M. Baire un résultat de la plus haute importance, qui peut s'énoncer ainsi : *la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction discontinue soit la limite de fonctions continues est qu'elle soit ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait* (³).

En un certain sens, cette proposition épuise complètement la question de la représentation des fonctions discontinues comme limites de fonctions continues. Cependant, si l'on observe que, non seulement les démonstrations de M. Baire, mais encore l'obtention effective de la représentation, nécessitent l'introduction des nombres transfinis, on peut penser qu'à côté de la proposition générale de M. Baire, qui dominera toujours la question, il y aurait intérêt à connaître d'autres propositions plus particulières, mais plus aisées à démontrer dans l'enseignement et à appliquer effectivement. Je me propose ici d'obtenir, sans utiliser les nombres transfinis, la représentation comme limite de fonctions continues d'une fonction discontinue telle que l'ensemble P de ses points de discontinuité soit *réductible* (c'est-à-dire tel que son dérivé P′ soit dénombrable). Quand on emploie le langage créé par M. G. Cantor, on doit dire que, étant donné un ensemble réductible P, il existe un nombre α de la première ou de la seconde classe tel que l'on ait $P^{\alpha} = 0$; d'ailleurs à tout nombre α correspondent une infinité d'ensembles réductibles P tels que P^{β} ne soit pas nul, lorsque β est inférieur à α. Lorsque l'on se place à ce point de vue, on est amené à considérer l'introduction des nombres transfinis comme nécessitée par la nature même de la question et à faire

---

(¹) *Voir*, par exemple, la Note finale de mes *Leçons sur la théorie des fonctions* (2ᵉ édition, p. 255).

(²) *Comptes rendus*, t. 137, 30 novembre 1903, p. 903.

(³) *Voir* Baire, Thèse : *Sur les fonctions de variables réelles* (*Annali di Matematica*, 1899) et *Nouvelle démonstration d'un théorème sur les fonctions discontinues* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, 1900).

dépendre de la valeur du nombre α la marche suivie pour la résoudre. Je me propose de montrer, au contraire, que la solution peut être basée simplement sur la notion d'ensemble dénombrable, et, par suite, être complètement indépendante de la valeur de α, qui n'intervient ni directement, ni indirectement. Pour abréger, je raisonnerai sur les fonctions d'une seule variable : il n'y a presque rien à changer pour traiter le cas de n variables.

Considérons une fonction $f(x)$, définie dans un intervalle fini a, b; soit P l'ensemble de ses points de discontinuité; on suppose que P' est dénombrable; il en résulte que P + P' est aussi dénombrable; désignons les points de P + P' par $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$. Désignons, d'autre part, par A_n l'ensemble des points de l'intervalle a, b définis par la condition suivante : le point x appartient à A_n, si, quel que soit p, le segment $\overline{xa_p}$ a une longueur supérieure à $\frac{1}{n}$. Il résulte du fait que P' est un ensemble fermé que tout point déterminé x de ab, distinct de $a_1, a_2, \ldots, a_p, \ldots$, appartient à A_n dès que n dépasse une certaine valeur. Ceci posé, il est très aisé de former une fonction *continue* f_n prenant les mêmes valeurs que f aux n points $a_1, a_2, \ldots, a_n$, ainsi qu'en tous les points de A_n; il suffit de remarquer que A_n se compose d'un nombre limité d'intervalles dans chacun desquels f est continue et que les points $a_1, a_2, \ldots, a_n$, en nombre limité, sont extérieurs à ces intervalles. Il est clair que lorsque n augmente indéfiniment la fonction f_n a pour limite f, quel que soit x à l'intérieur de ab; le problème proposé est donc résolu.

On peut rapprocher ce résultat de celui qu'a obtenu récemment M. Ernst Lindelöf (*Comptes rendus*, 2 novembre 1903). Dans cette intéressante Note, M. Lindelöf démontre, *sans l'intervention des nombres transfinis*, le théorème dit de Cantor-Bendixson [1]. Ces exemples permettent d'espérer qu'il pourra être possible d'ar-

---

[1] Dans ses *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, qui paraîtront prochainement (10), M. Lebesgue donne de ce théorème une démonstration qui est au fond très analogue à celle de M. Lindelöf. Mais M. Lebesgue emploie le *langage* des nombres transfinis, de sorte que l'on aperçoit moins nettement que la théorie de ces nombres n'intervient pas; M. Lindelöf et M. Lebesgue sont arrivés à leurs démonstrations indépendamment l'un de l'autre; chacun d'eux m'a communiqué la sienne avant d'avoir connaissance de l'autre.

river à éviter l'introduction de ces nombres dans bien des questions où cette introduction a jusqu'ici paru nécessaire; il semble, en effet, qu'à s'en passer on gagne toujours en simplicité et en clarté. Cette remarque ne diminue d'ailleurs en rien l'intérêt philosophique ni l'importance réelle des profondes conceptions de M. George Cantor, dont l'influence sur l'évolution des mathématiques dans le dernier quart du XIXe siècle a été, comme l'on sait, des plus considérables : cette influence subsistera tant qu'il y aura des analystes, même si certaines formes particulières données par M. George Cantor à sa pensée ne conservaient un jour qu'un intérêt historique.

Un théorème sur les ensembles mesurables [1].

Je voudrais signaler un théorème fort général, que je crois nouveau, et qui me paraît de nature à pouvoir rendre de très grands services dans de nombreuses applications à la théorie des fonctions.

Étant donnés, dans un domaine limité, une infinité d'ensembles mesurables, tels que la mesure de chacun d'eux ne soit pas inférieure à σ, les points communs à une infinité d'entre eux forment un ensemble dont la mesure n'est pas inférieure à σ.

On peut déduire, en particulier, de ce théorème que la propriété pour une fonction *d'être continue en excluant des ensembles de mesure aussi petite que l'on veut* se conserve à la limite, c'est-à-dire appartient à la fonction limite (supposée existante) d'une suite quelconque de fonctions qui la possèdent. Cette propriété appartient, par suite, à toutes les fonctions définies jusqu'ici. Sous cette forme, cette remarque est équivalente à la proposition suivante, encore inédite, que me communique M. Lebesgue : *Toute fonction mesurable est continue en chacun de ses points, sauf pour un ensemble de points de mesure nulle, aux ensembles de mesure nulle près.*

En terminant, je dois signaler que la représentation simple, comme limite de fonctions continues, d'une fonction discontinue

[1] *Comptes rendus*, t. 137, 7 décembre 1903, p. 966.

telle que l'ensemble P de ses points de discontinuité est dénombrable a été obtenue par M. Lebesgue [1]. Dans ma Note du 30 novembre, j'ai traité seulement le cas où P est réductible ; j'avais d'ailleurs surtout en vue de montrer comment l'introduction des nombres transfinis pouvait être évitée dans une question où, à un certain point de vue, elle aurait pu paraître nécessaire. M. Lebesgue m'informe qu'il possède une démonstration sans nombres transfinis du théorème général de M. Baire ; c'est là un résultat dont l'importance n'échappera à aucun géomètre ; j'espère que cette démonstration sera bientôt publiée.

Sur les théorèmes fondamentaux de la théorie des fonctions de variables réelles [2].

J'ai indiqué, dans mes *Leçons sur la théorie des fonctions*, comment on pouvait mesurer certains ensembles en partant d'intervalles et arrivant à des ensembles de plus en plus compliqués, au moyen de passages à la limite successifs. Puis sont venues les belles recherches originales de M. Lebesgue. Mais je n'ai jamais abandonné mon point de vue primitif ; le moment me semble venu de publier une exposition d'ensemble dans laquelle les résultats les plus importants déjà acquis dans la théorie des fonctions de variables réelles, et d'autres résultats nouveaux, sont obtenus par une voie directe, assez simple et assez élémentaire pour pouvoir prendre place dans tous les cours d'analyse. Je résume brièvement la marche suivie [3] : le Mémoire détaillé paraîtra prochainement dans un autre Recueil [4].

J'appelle *ensemble élémentaire* l'ensemble des points intérieurs à un intervalle (ou à un rectangle dans le plan, etc.) ; un *domaine*

---

(1) *Sur l'approximation des fonctions* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, novembre 1898) ; d'après une lettre que m'écrit M. Lebesgue, il y a lieu, dans la partie de cette Note où il est question de points de discontinuité, de désigner par $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$ non seulement les points de discontinuité, mais les extrémités des *intervalles* de continuité (forcément dénombrables en tout cas).

(2) *Comptes rendus*, t. 154, 12 février 1912, p. 413.

(3) *Voir* aussi mes Notes du 7 décembre 1903, des 14 et 28 février 1910 et du 6 mars 1911.

(4) *Voir* mes *Leçons sur la théorie des fonctions* (**1**), Note VI.

simple est la réunion d'un nombre fini d'ensembles élémentaires.

J'ai souvent attiré l'attention sur le :

PREMIER THÉORÈME FONDAMENTAL. — *Si tous les points d'un domaine borné et fermé* D *sont intérieurs à l'un des ensembles élémentaires* $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, *ils sont tous intérieurs à un domaine simple formé de certains de ces ensembles.*

En abrégé : *eu égard aux ensembles bornés et fermés, une infinité d'ensembles élémentaires équivaut à un domaine simple* (¹).

J'appelle ensemble *bien défini* tout ensemble élémentaire et tout ensemble qui, dans un domaine borné D, peut être obtenu par la répétition illimitée des deux opérations suivantes :

1° Somme d'une infinité d'ensembles (déjà définis) sans partie commune ;

2° Différence de deux ensembles (déjà définis) dont l'un contient l'autre.

La mesure d'un ensemble bien défini s'obtient, par définition, au moyen des opérations même par lesquelles on le construit (²). Si l'on cherche à calculer effectivement cette mesure, il est naturel de se donner une limite de l'approximation désirée ; on est ainsi conduit au :

SECOND THÉORÈME FONDAMENTAL. — *Étant donnés un ensemble bien défini quelconque* E *et un nombre* ε *arbitrairement petit, on peut construire un domaine simple* D *tel que l'ensemble des*

(¹) L'étude des ensembles rentrant dans les classifications de M. Fréchet, et pour lesquels existe un théorème analogue, a fait l'objet de plusieurs travaux, notamment de MM. Fréchet, Moore, et Chitender.

Parmi les travaux dont les classes d'ensembles ainsi mesurables ont fait l'objet, je citerai notamment ceux de MM. Souslin, Hausdorff, Alexandroff, Sierpinski et l'important Mémoire de M. de la Vallée Poussin : *Sur l'intégrale de Lebesgue* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, 1915).

(²) L'opération qui consiste à prendre la partie commune à deux ensembles bien définis conduit aussi à des ensembles bien définis ; mais, pour mesurer l'un d'eux, il faut ramener sa définition aux deux opérations simples (ce qui est toujours possible).

points de E qui n'appartiennent à D et des points de D qui n'appartiennent pas à E soit compris à l'intérieur d'ensembles élémentaires d'étendue totale inférieure à ε.

En abrégé, *tout ensemble bien défini équivaut à un domaine simple, à ε près.*

Les mêmes méthodes, appliquées à l'étude des fonctions de variables réelles, conduisent au :

TROISIÈME THÉORÈME FONDAMENTAL (¹). — *Étant donnés une fonction bornée F définissable analytiquement et deux nombres arbitrairement petits ε et α, on peut trouver un polynome P tel que l'ensemble des points où la valeur absolue de la différence entre F et P est supérieure à ε puisse être enfermé dans des ensembles élémentaires de mesure totale inférieure à α.*

En abrégé, *toute fonction équivaut à un polynome, à* DEUX ε *près* (un ε différence et un ε domaine).

C'est sur les deux derniers théorèmes fondamentaux que je base la *définition* et l'étude des intégrales des fonctions bornées. Une suite bornée de polynomes P_n est asymptotiquement convergente si la mesure des domaines algébriques, où la différence $|P_n - P_m|$ est inférieure à ε, tend vers zéro quel que soit ε lorsque n et m croissent indéfiniment.

L'intégrale d'une fonction se définit comme la limite de l'intégrale d'une suite de polynomes asymptotiquement convergente, le champ d'intégration étant une suite asymptotiquement convergente de domaines simples (on fait varier d'abord les polynomes, puis le champ d'intégration).

Toutes les opérations sur les fonctions bornées auxquelles s'applique une proposition analogue au premier théorème de la moyenne (équations différentielles, intégrales, intégro-différentielles, etc.) se ramènent à des opérations sur des suites de polynomes asymptotiquement convergentes, opérations qui conduisent en général (²) à des suites uniformément convergentes.

(¹) Ce théorème se déduit de ceux que j'ai énoncés dans ma Note du 7 décembre 1903 au moyen des travaux de M. Lebesgue et du théorème fondamental de Weierstrass; mais je suis actuellement la marche inverse, en l'établissant directement.

(²) La seule difficulté provient, *dans le cas où interviennent des divisions.*

On sait que l'on peut considérer les fonctions non bornées et les domaines infinis comme des cas limites des fonctions bornées et des domaines finis, mais il y a lieu d'étudier, dans chaque cas, des conditions supplémentaires de convergence, conditions non toujours vérifiées.

Il est à peine besoin de faire observer que les considérations précédentes s'appliquent à toutes les fonctions introduites jusqu'ici en analyse, sauf peut-être aux fonctions non définissables analytiquement de M. Lebesgue.

La classification des ensembles de mesure nulle et la théorie des fonctions monogènes uniformes (1).

Toutes les fonctions définissables analytiquement ayant les mêmes propriétés générales lorsqu'on exclut les ensembles de mesure nulle (2), une classification de ces ensembles doit précéder l'étude approfondie des propriétés de classes particulières de fonctions. Je baserai cette classification sur la notion d'ensemble régulier, convenablement précisée (3). Un ensemble régulier (de mesure nulle) est défini par une infinité énumérable de points fondamentaux A_n à chacun desquels est attaché une infinité énumérable de domaines de forme régulière (carrés ou cercles dans le cas de deux dimensions) D_n^r, tels que D_n^r contienne D_n^{r+1} et que les séries $\sigma_r = \sum_n D_n^r$ convergent pour toute valeur de r, les sommes σ_r tendant vers zéro pour r infini.

Étant donnée une série convergente à termes positifs, l'inverse du reste R_n est une fonction croissante de n. L'ordre d'infinitude de cette fonction sera, par définition, l'ordre de convergence de la série. Étant donnée une infinité énumérable de séries convergentes,

---

de ce que le diviseur peut tendre vers zéro : on sait que c'est là le point capital de la méthode de Fredholm.

(1) *Comptes rendus*, t. 154, 26 février 1912, p. 568.

(2) *Voir* mes Notes du 7 décembre 1903 et du 12 février 1912.

(3) *Voir* ma Note du 6 mars 1911 ; le point nouveau que j'introduis ici est la forme régulière des domaines d'exclusion : cette modification n'altère pas la proposition fondamentale : tout ensemble de mesure nulle peut être regardé comme faisant partie d'un ensemble régulier.

telles que σ_r, *l'ordre asymptotique* de convergence est, par définition, un ordre (qu'on choisira pratiquement le plus grand possible), tel que l'ordre de convergence de la série σ_r lui devienne supérieur à partir d'une certaine valeur de r. Cet ordre est aussi, par définition, l'ordre asymptotique de l'ensemble régulier auquel correspondent les séries σ_r. *L'ordre d'un ensemble de mesure nulle est le plus grand possible des ordres asymptotiques des ensembles réguliers qui le renferment.* Cette définition ne permet pas toujours de déterminer l'ordre avec précision, mais elle fournit en tout cas une limite inférieure de cet ordre, c'est-à-dire permet d'affirmer qu'il est supérieur à un ordre connu. C'est sous cette forme qu'on utilisera généralement la notion de l'ordre.

On sait que la notation des ordres d'infinitude présente des analogies avec celle des nombres transfinis (de seconde classe), avec laquelle elle est à peu près dans le même rapport que la notation des nombres rationnels (fractions continues limitées) avec celle des entiers [1]. L'ordre d'un ensemble énumérable dépasse tout nombre assignable de seconde classe; on peut le noter Ω; la question de savoir si tous les ensembles d'ordre Ω sont nécessairement énumérables intéressera peut-être ceux qui attribuent un sens aux spéculations dans lesquelles interviennent *tous* les nombres de seconde classe.

La considération des ordres permet d'étendre beaucoup la notion du domaine d'existence des fonctions monogènes uniformes, cette extension étant assujettie à comprendre comme cas particulier la théorie de Weierstrass. J'avais déjà fait des tentatives dans ce sens et les résultats que j'avais obtenus [2] prouvent que les définitions qui vont être données ne sont pas simplement une généralisation théorique, mais qu'il existe effectivement des fonctions monogènes

---

(1) *Voir* mes *Leçons sur la théorie de la croissance* (7). Je rappelle qu'il est toujours possible, étant donné un système de notations, de fabriquer des ordres d'infinitude dépassant ce système. Tout système de notations bien défini est donc exposé à être inapplicable ou en défaut. Mais, inversement, si l'on a à envisager un système quelconque d'ordres, on pourra toujours fixer des notations suffisantes. Nous n'avons besoin, dans ce qui suit, que de la connaissance des premières notations, qui sont classiques.

(2) *Voir* notamment mon Mémoire *Sur les séries de polynomes et de fractions rationnelles* (*Acta mathematica*, t. XXIV).

satisfaisant à ces définitions et échappant à celle de Weierstrass. Seulement, ces résultats ne s'appliquaient qu'à des classes de fonctions très particulières, du moins en apparence, définies par certains développements en série, de forme donnée *a priori*; tandis que je prends actuellement pour base la définition générale de la fonction monogène, d'après Cauchy.

DÉFINITION. — *Une propriété quelconque est dite vérifiée asymptotiquement d'ordre α dans un domaine D, lorsqu'elle est vérifiée en tout point de ce domaine, à l'exclusion d'un certain ensemble de mesure nulle, d'ordre supérieur à α.*

THÉORÈME. — *Il existe un ordre α tel que, si la définition classique des fonctions monogènes uniformes est vérifiée asymptotiquement d'ordre α dans un domaine D d'un seul tenant par une fonction $f(x+iy)$, cette fonction ne peut être nulle sur un petit arc sans être nulle partout (en tout point où elle est définie). On peut, pour fixer les idées, prendre $\alpha = \omega^2$.*

Il est évident que le théorème ne subsisterait pas si l'on prenait $\alpha \leq 1$, car le domaine D pourrait alors ne pas rester d'un seul tenant, après l'exclusion de l'ensemble de mesure nulle. La question se pose donc de déterminer l'ordre le moins élevé possible α (compris entre 1 et ω^2), tel que le théorème subsiste.

La démonstration de ce théorème est essentiellement basée sur l'intégrale de Cauchy [1]; elle conduit aisément à une représentation analytique générale des fonctions monogènes uniformes, qui comprend comme cas particulier celle de M. Mittag-Leffler [2]. En employant le langage des nombres transfinis (il y aurait lieu de faire des réserves sur l'emploi de Ω, mais je m'en sers uniquement pour faire image), on peut dire que le cas traité par M. Mittag-Leffler (ensembles réductibles) correspond à l'hypothèse que l'ordre α de l'ensemble des points singuliers atteint Ω (ou peut-être

---

[1] J'utilise, bien entendu, les propriétés énoncées dans ma Note du 12 février 1912.

[2] *Acta mathematica*, t. IV; bien entendu, ces fonctions possèdent aussi des développements en séries de polynomes de forme M (théorème de l'étoile de M. Mittag-Leffler généralisé) déterminés d'une manière unique par la connaissance des dérivées en un point.

même à un cas particulier de cette hypothèse); nous sommes arrivés à remplacer Ω par ω^2; il sera sans doute possible de diminuer encore beaucoup la valeur de α (*voir* les Notes de MM. Carleman et Denjoy; *Comptes rendus*, t. 174).

Ce qui est acquis, c'est la possibilité de tirer de la définition de Cauchy, vérifiée en certains ensembles de points, ensembles qui peuvent n'être denses nulle part ([1]), la conséquence essentielle sur laquelle Weierstrass a basé sa théorie des fonctions analytiques : deux fonctions qui coïncident sur un petit arc coïncident dans tout leur domaine d'existence. La conception de Cauchy est ainsi débarrassée d'une partie au moins des restrictions que lui avait apportées Weierstrass ([2]).

Sur les définitions analytiques et sur l'illusion du transfini ([3]).

I. — La « définition » d'une fonction non représentable analytiquement déduite de la « définition » des nombres de seconde classe.

J'ai, à maintes reprises, attiré l'attention sur ce fait qu'on ne peut pas fixer, au moyen d'un nombre fini de mots, un procédé de construction ou de notation de tous les nombres de seconde classe. Les difficultés sont *exactement les mêmes* pour définir une échelle transfinie de types croissants, c'est-à-dire une suite transfinie de fonctions déterminées telles que chacune ait une croissance asymptotiquement supérieure aux précédentes et telles que toute fonction donnée soit dépassée en croissance asymptotique

---

([1]) Il est évident que ces ensembles (domaines d'où l'on exclut des ensembles de mesure nulle d'ordre ≧ α) forment un groupe, en ce sens que l'ensemble de points communs à deux d'entre eux constitue un ensemble de même nature (mais qui peut ne plus être d'un seul tenant), car la somme de deux ensembles de mesure nulle d'ordre supérieur ou égal à α est évidemment un ensemble de mesure nulle d'ordre supérieur ou égal à α. Ceci permet de prouver que les opérations sur les fonctions monogènes généralisées conduisent à des fonctions monogènes, dans les mêmes conditions où les opérations sur les fonctions analytiques de Weierstrass conduisent à des fonctions analytiques.

([2]) La théorie des fonctions quasi méromorphes et quasi analytiques a reçu pendant l'impression de ce livre, une impulsion nouvelle à la suite de Notes importantes de MM. Denjoy, Wolff et Carleman (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1921 et 1922, t. 173 et 174).

([3]) *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 47, 1919, p. 42.

par une fonction de la suite. Si, pour fixer les idées, on fait correspondre aux nombres ordinaires n les fonctions x^n, on fera correspondre à ω la fonction x^x et à tout nombre α de seconde classe une fonction bien déterminée, définie pour les valeurs entières de la variable et construite au moyen d'itérations et de l'emploi du théorème de Paul du Bois-Reymond (sous la forme $\Psi(x) = \varphi_x(x)$) de la même manière que le nombre α au moyens d'additions et de passages à la limite.

Cette « définition » des nombres de seconde classe au moyen d'une échelle de types croissants met en évidence les difficultés que soulève une telle « définition »; mais elle ne les augmente pas.

A tout nombre incommensurable, on peut faire correspondre de bien des manières une fonction croissante, définie pour les valeurs entières de la variable. On peut par exemple le développer en fraction continue et considérer la fonction croissante définie en prenant pour chaque valeur de n le plus grand des quotients incomplets a_1, a_2, ..., a_n. Si cette fonction reste finie pour n infini, c'est qu'il y a au moins une valeur entière p telle qu'une infinité des a_n soient égaux à p; on considérera le plus petit des nombres p ayant cette propriété et l'on appellera a_m le $n^{ième}$ quotient incomplet égal à p; m est une fonction croissante de n. On pourrait aussi écrire le nombre incommensurable sous forme de fraction décimale et considérer les rangs successifs du plus petit de celui des chiffres 0, 1, 2, ... qui figure une infinité de fois.

Il est clair que, quelle que soit la fonction croissante d'entiers $\varphi(n)$, on peut construire effectivement un nombre incommensurable qui correspond à cette fonction.

On peut, d'autre part, à tout nombre incommensurable faire correspondre un entier q, qui sera, par exemple, le plus petit des rangs du plus petit des nombres entiers qui figure parmi les quotients incomplets ou les chiffres décimaux. Parmi les nombres incommensurables auxquels correspond la fonction $\varphi(n)$, on peut en construire pour lesquels l'entier q correspondant dépasse tout entier donné à l'avance.

Supposons maintenant que nous considérions comme définie une suite transfinie de fonctions croissantes $\varphi_\alpha(n)$, correspondant

aux divers nombres de seconde classe α. J'insiste encore sur le fait que cette hypothèse est équivalente à l'hypothèse que font tous ceux des mathématiciens qui considèrent comme définie la suite des α. Je ne renouvelle pas les réserves que j'ai faites sur ces « définitions ».

A tout nombre incommensurable x, compris entre 0 et 1, nous avons fait correspondre une fonction croissante déterminée $\varphi(n)$; soit α le plus petit nombre de seconde classe tel que $\varphi_\alpha(n)$ croisse plus vite que $\varphi(n)$; nous ferons correspondre à x le nombre α. Si nous posons, d'autre part,

$$f(x) = \varphi_\alpha(q),$$

le nombre entier q étant défini comme nous l'avons dit plus haut, la fonction $f(x)$ échappe à toute représentation analytique, bien qu'elle puisse être calculée pour les nombres x dont le développement en fraction continue ou en fraction décimale est asymptotiquement connu. Mais la représentation analytique complète de $f(x)$ exigerait la définition précise de toutes les fonctions $\varphi_\alpha(n)$ et nous savons que cette définition est impossible.

II. — L'illusion des « définitions » analytiques qui font intervenir des séries dont la convergence n'est pas connue avec précision.

Au sujet des définitions ou représentations analytiques, quelques remarques simples permettent de mettre en évidence l'illusion qu'il y a dans les définitions générales où l'on fait intervenir des séries qui convergent sans qu'on ait aucun renseignement sur la nature de leur convergence.

L'exemple le plus simple d'une telle série est une suite dont tous les éléments sont égaux à 0 ou à 1. Pour chaque valeur de n, on a, ou bien

$$a_n = 0,$$

ou bien

$$a_n = 1.$$

Trois cas sont donc possibles, ou la suite a_n a pour limite 0, ou elle a pour limite 1, ou elle n'a pas de limite. Le problème de savoir dans lequel de ces trois cas on se trouve dépend évidem-

ment de la manière dont sont définis les a_n. Il est plus ou moins difficile, plus ou moins compliqué, parfois aisé et parfois insoluble. Mais *on ne fait pas faire un pas à ce problème* en remplaçant son énoncé en langage vulgaire, qui vient d'être donné, par une formule analytique, aisée à donner de bien des manières. Si l'on pose

$$x_n = 1 + |a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \ldots + |a_{n-1} - a_n|,$$

la suite des x_n tend vers une limite finie ou vers $+\infty$ suivant que la suite des a_n a ou n'a pas une limite. Si donc on pose

$$x = \lim \frac{1}{x_n},$$

la valeur de x sera ou un nombre fini ou o suivant que la suite des a_n a ou n'a pas une limite. Il est facile de définir une fonction $y(x)$ telle que $y = 1$ si $x \neq 0$ et $y = 0$ si $x = 0$; la fonction y sera donc 1 ou o, suivant que la suite des a_n a une limite ou n'a pas de limite. La série

$$y + a_1 y + (a_2 - a_1) y + \ldots + (a_n - a_{n-1}) y + \ldots$$

est donc convergente quelle que soit la suite donnée; sa somme est o si la suite des a_n n'a pas de limite, 1 si cette suite a pour limite o, et 2 si cette suite a pour limite 1.

Si nous considérons maintenant une suite quelconque de nombres réels

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n, \quad \ldots$$

il est facile de définir une fonction $\varphi(x)$ égale à o ou à 1 suivant que x est compris ou n'est pas compris dans un certain intervalle ab. En prenant $a_n = \varphi(x_n)$ et utilisant les résultats précédents, en choisissant successivement pour ab tous les intervalles de dimension $\frac{1}{2^p}$ en lesquels on peut diviser l'intervalle $-\infty$, $+\infty$ et faisant augmenter p indéfiniment, on définira analytiquement sans peine en fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ un nombre x égal à la limite des x_n dans le cas où cette limite existe et égal, par exemple, au nombre imaginaire i lorsque cette limite n'existe pas. L'emploi d'une telle fonction permettrait de donner formellement une forme analytique à certaines définitions, en apparence plus

compliquées, dans lesquelles on fait intervenir, parmi certaines séries, celles seulement qui convergent [1].

Mais ces exemples simples, dans lesquels on dissèque en quelque sorte le mode de construction effectif des expressions analytiques font bien voir ce qu'il y a d'artificiel dans de telles expressions. La fonction $y(x)$ qui est égale à 1 pour $x = 0$ et à 0 pour $x \neq 0$ n'est pas, bien entendu, continue; une représentation analytique de cette fonction, non seulement n'apprend rien de plus que sa définition, mais apprend beaucoup moins; pour savoir quelle est la valeur de y, il faut savoir si x est égal à 0 ou est différent de 0 et, si x est donné comme limite d'une suite, il faut précisément faire une étude directe de cette suite.

III. — LES NOMBRES INCOMMENSURABLES ET L'ILLUSION DU TRANSFINI.

Revenons-en à l'illusion du transfini. Il est aisé de donner des formules analytiques faisant connaître les valeurs successives des entiers $a_1, a_2, \ldots, a_m, \ldots$ qui sont les quotients incomplets ou les chiffres décimaux d'un développement de x en fraction continue ou en fraction décimale. Ces formules sont d'ailleurs calculables, lorsqu'on sait qu'elles représentent des entiers. Mais toutes les questions asymptotiques qu'on peut se poser sur la suite des a_m se ramènent à des problèmes réels dont la solution n'est pas avancée si on les traduit sous forme analytique.

Je ne reviendrai pas sur le paradoxe du transfini, sur lequel je me suis déjà expliqué [2], mais il n'est pas superflu d'observer que, quels que soient les nombres transfinis α, qu'on aura définis au moyen de moins de 10000 mots, par exemple, on pourra définir un nombre x dont le développement introduit une fonction croissante dépassant toutes les fonctions $\varphi_\alpha(n)$; mais la considération effective d'un tel nombre x est aussi compliquée que la considération de la fonction croissante correspondante; il y aura au moins autant de complication à définir le nombre x, si on

(1) *Voir* par exemple la Note *Sur l'existence des fonctions de classe quelconque* dans mon livre *Leçons sur les fonctions de variable réelle.*

(2) *Voir* notamment la Note IV de mes *Leçons sur la théorie des fonctions*, 2e édition.

le définit par suite des a_n, qu'il peut y en avoir à l'étudier, si, par impossible, on le définit par une équation transcendante, par exemple, et si l'on arrive d'après cette définition à connaître les propriétés asymptotiques des a_n (ce qui est bien invraisemblable). De toute façon, il faudra pour calculer les valeurs de $\varphi_\beta(q)$ qui correspondent aux divers nombres x pour lesquels la croissance asymptotique n'est pas inférieure à $\varphi_\beta(x)$ et est inférieure à $\varphi_{\beta+1}(x)$, il faudra, dis-je, avoir poussé jusqu'à β la définition des nombres transfinis. Cela sera nécessaire aussi pour définir β au moyen de la suite $a_1, a_2, \ldots, a_m, \ldots$: il faudra une superposition de passages à la limite de complication au moins β, c'est-à-dire une fonction de classe au moins β dans la classification de M. Baire.

Le lecteur ne comparera pas sans intérêt ces considérations avec celles par lesquelles M. Lebesgue est arrivé à « nommer » une fonction non définissable analytiquement (1). Le procédé que j'emploie me paraît, à certains égards, préférable au sien; mais le sien présente certains avantages pour ceux qui ne partagent pas en tous points mes idées sur l'illusion du transfini.

Les ensembles de mesure nulle (2).

Un ensemble linéaire E *est dit* de mesure nulle (3) *lorsque, étant donné un nombre arbitrairement petit* ε, *on peut enfermer tous les points de* E *dans des intervalles dont la somme est inférieure à* ε. Pour un ensemble à deux dimensions, la définition est la même : il suffit d'y remplacer le mot *intervalles* par le mot *rectangles;* on peut observer qu'il est équivalent de parler de *carrés* au lieu de *rectangles;* car, étant donné un rectangle, on

---

(1) *Journal de Mathématiques*, 1905.

(2) Cette Note est la reproduction d'une des conférences inaugurales de l'Institut Rice, à Houston (Texas) (10-12 octobre 1912). Elle a paru en anglais dans *The Book of the opening of the Rice institute* sous le titre *Aggregates of zero measure* et en français dans le *Bulletin de la Société mathématique de France* (1913).

(3) Dans mes *Leçons sur la théorie des fonctions*, où j'ai donné pour la première fois cette définition, j'emploie l'expression *mesure zéro;* depuis, l'expression *mesure nulle,* employée, je crois, pour la première fois par M. Lebesgue, a prévalu.

peut trouver un nombre fini de carrés dont l'aire totale diffère aussi peu que l'on veut de l'aire du rectangle et tels que tout point intérieur au rectangle soit aussi intérieur à l'un de ces carrés. Il est préférable, dans certaines questions, de considérer des carrés au lieu de rectangles; on pourrait aussi remplacer les carrés par des cercles sans altérer la généralité de la définition.

Les ensembles de mesure nulle jouent un rôle très important dans la théorie des fonctions de variables réelles et de variables complexes; il est utile de pouvoir comparer entre eux les divers ensembles de mesure nulle; cette comparaison est facilitée par la notion d'ensemble régulier. Nous allons définir d'abord les ensembles réguliers et les points fondamentaux de ces ensembles; nous montrerons ensuite que tout ensemble régulier est équivalent à un autre ensemble régulier dont les points fondamentaux sont choisis d'une manière particulière, sont par exemple les points à coordonnées rationnelles; nous traiterons enfin de la classification des ensembles de mesure nulle ayant des points fondamentaux donnés, cette classification étant basée sur la décroissance asymptotique des intervalles (ou carrés) d'exclusion.

I.

Un ensemble de mesure nulle est dit *régulier* lorsqu'il peut être défini de la manière suivante :

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ *une infinité énumérable de points, dits* points fondamentaux; *à chaque nombre entier* h *faisons correspondre une infinité de carrés* $C_1^h, C_2^h, \ldots, C_n^h, \ldots$ *dont les aires forment une série convergente et tels que le carré* C_n^h *renferme à son intérieur* $C_n^{(h+1)}$ *et tende vers* A_n *lorsque* h *augmente indéfiniment. Soit* E_h *l'ensemble des points intérieurs à l'un des carrés* $C_n^{(h)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$; *l'ensemble des points intérieurs à tous les* E_h $(h = 1, 2, \ldots)$ *est un ensemble régulier* (qui est évidemment de mesure nulle).

Tout ensemble de mesure nulle fait partie d'un ensemble régulier. En d'autres termes, A étant un ensemble quelconque de mesure nulle, on peut définir un ensemble régulier E de mesure nulle tel que tout point de A appartienne à E. Pour démontrer cette proposition, donnons-nous une suite de nombres $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ décroissant et tendant vers zéro, la série $\Sigma\varepsilon_n$ étant supposée

convergente. L'ensemble A étant de mesure nulle, nous pouvons définir un ensemble $A^{(h)}$ de carrés (à côtés parallèles aux axes) dont la somme des aires est inférieure à ε_h et tels que tout point de A soit intérieur à l'un des carrés $A^{(h)}$. Nous définirons d'abord les carrés $A^{(1)}$, puis les carrés $A^{(2)}$; s'il y a des portions de ces carrés $A^{(2)}$ qui sont extérieures à tous les carrés $A^{(1)}$, nous pouvons les supprimer comme inutiles; ceci revient à dire que nous ne conservons que les portions des carrés $A^{(2)}$ qui sont intérieures à l'un des carrés $A^{(1)}$; pour procéder d'une manière méthodique et définie d'une manière précise, nous considérons le premier des carrés $A^{(1)}$, soit $A_1^{(1)}$, et nous opérerons successivement sur les portions des carrés successifs $A^{(2)}$ qui sont intérieures à $A_1^{(1)}$; nous continuerons de la même manière avec $A_2^{(1)}$, en ayant soin toutefois de laisser de côté les portions déjà considérées, etc. Chacune de ces opérations nous conduit à considérer des rectangles dont chacun peut être remplacé par une infinité énumérable de carrés (un nombre fini dans des cas particuliers); il suffit, pour former ces carrés suivant une loi déterminée, de construire de proche en proche le plus grand carré possible intérieur au rectangle et dont le sommet le plus rapproché de l'origine des coordonnées O coïncide avec le sommet du rectangle le plus rapproché de O. Si parmi les carrés ainsi définis, il y en a qui ne renferment aucun point de l'ensemble A, nous les supprimerons. Nous pouvons supposer les carrés $A^{(1)}$ rangés par ordre de grandeur décroissante (s'il y en a d'égaux, nous les rangerons d'après les valeurs relatives des abscisses de leurs centres et, si ces abscisses sont égales, d'après les valeurs de leurs ordonnées). Nous rangerons de même les carrés $A^{(2)}$ (après les transformations indiquées), et ainsi de suite.

Nous allons définir un ensemble de carrés $B^{(1)}$, qui comprendra tous les carrés $A^{(1)}$ et en outre un certain nombre des carrés $A^{(2)}$, $A^{(3)}$, ... De même $B^{(2)}$ comprendra tous les carrés $A^{(2)}$ et en outre un certain nombre des carrés $A^{(3)}$, ... Il est clair que la somme des carrés $B^{(h)}$ est inférieure à

$$\varepsilon_h + \varepsilon_{h+1} + \dots$$

Elle est finie quel que soit h et tend vers zéro lorsque h augmente indéfiniment; tous les carrés $A^{(h)}$ faisant partie des $B^{(h)}$, tout point

de A est inférieur à l'un des carrés B^n. Pour que l'ensemble E défini par les B^n soit régulier, il suffit que l'on puisse numéroter les B^n, B_1^n, B_2^n, ..., B_n^n, ..., de telle manière que B_n^{n+1} soit inférieur à B_n^n. On arrive à ce résultat de la manière suivante. Prenons d'abord ceux des carrés A^1, s'il en existe, dont l'aire est supérieure à ε_2 (il n'en existe pas dont l'aire est supérieure à ε_1, puisque la somme de tous les A^1 est inférieure à ε_1; nous désignerons ces carrés par B_1^1, B_2^1, ..., $B_{n_2}^1$. Prenons ensuite ceux des carrés A^1 dont l'aire est supérieure à ε_3; et désignons-les par $B_{n_2+1}^1$, $B_{n_2+2}^1$, ..., $B_{p_2}^1$. Nous allons considérer maintenant les carrés A^2 d'aire supérieure à ε_3; ils sont rangés dans un ordre déterminé, comme il a été dit; si le premier d'entre eux est intérieur à l'un des A^1 déjà numérotés, par exemple à B_k^1, nous le désignerons par B_k^2, sinon, nous le désignerons à la fois par $B_{p_2+1}^1$ et par $B_{p_2+1}^2$; de même, si le second des A^2 considérés est intérieur à l'un des A^1 déjà numérotés et distinct de B_k^1, soit B_h^1, nous le désignerons par B_h^2; s'il n'est intérieur à aucun des A^1 (il ne peut pas être intérieur à un A^1 non numéroté, puisque son aire est supérieure à ε_3 et que les A^1 non numérotés ont une aire inférieure à ε_3) ou s'il est intérieur précisément à B_k^1 qui a déjà été utilisé, nous le désignerons à la fois par $B_{p_2+2}^1$ et par $B_{p_2+2}^2$, nous arriverons ainsi à définir un certain nombre de nouveaux carrés B^1, soit $B_{p_2+1}^1$, $B_{p_2+2}^1$, ..., $B_{n_3}^1$ et un certain nombre de carrés B^2, qui comprennent tous les A_2 d'aire supérieure à ε_3.

Considérons maintenant les carrés A^1 d'aire supérieure à ε_4; nous les désignons par $B_{n_3+1}^1$, $B_{n_3+2}^1$, ..., $B_{p_3}^1$, nous procéderons de la même manière que précédemment pour les A^2 dont l'aire est supérieure à ε_4, et nous passerons ensuite aux A^3 dont l'aire est supérieure à ε_4; ceux d'entre eux qui sont intérieurs à des B^2 déjà numérotés prendront les mêmes numéros (chaque numéro n'étant donné, bien entendu, qu'une seule fois); les autres seront désignés à la fois par B_s^1, B_s^2, B_s^3. On continuera indéfiniment de la même manière; les ε_k tendent vers zéro lorsque k augmente indéfiniment, et chaque opération ne portant que sur un nombre fini de carrés, tout carré appartenant à A^n figurera dans B^n avec un rang déterminé. De plus, il est évident que B_q^h tend vers zéro, quel que soit q lorsque h croît indéfiniment. Il ne pourra pas arriver que certaines suites B_q^1, B_q^2, ..., B_q

s'arrêtent, car cela voudrait dire qu'aucun des carrés A^{r+1} n'est intérieur à B_q^r, c'est-à-dire que B_q^r ne renfermerait aucun point de l'ensemble A, contrairement à nos hypothèses. Les ensembles de carrés B^h définissent donc bien un ensemble régulier E, qui comprend tous les points de A. Notre théorème est établi.

On peut observer que dans la définition de l'ensemble régulier E il y a certaines suites B_q^1, B_q^2, ..., dont un certain nombre de premiers termes sont des carrés qui coïncident entre eux; ce n'est pas là une difficulté; on peut néanmoins, si l'on veut, éviter cette singularité en modifiant un peu les définitions des premiers B_q d'une telle série; si B_q^1, B_q^2, B_q^3 par exemple coïncident, on remplacera B_q^2 par $(1+\varepsilon_2)B_q^2$ et B_q^1 par $(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)B_q^1$ (nous désignons par αC un carré homothétique au carré C par rapport à son centre, avec le rapport d'homothétie α). Ces opérations ont pour résultat de multiplier l'étendue totale des carrés B^h par un facteur inférieur au produit infini convergent $\Pi(1+\varepsilon_k)$.

On peut observer que l'ensemble régulier E que nous avons défini n'est pas nécessairement le plus simple possible des ensembles réguliers de mesure nulle qui renferment A, mais il importe peu que la démonstration donne *le plus simple*; l'essentiel est de prouver qu'il en existe *un*; il est alors possible de considérer, sans contradiction, l'ensemble de tous les ensembles réguliers de mesure nulle qui contiennent A et l'on peut choisir, dans cet ensemble, sinon le plus simple (qui peut ne pas exister, de même qu'il n'existe pas de *plus petit* nombre rationnel supérieur à $\sqrt{2}$), du moins un ensemble E dont la simplicité est aussi voisine que l'on veut de la simplicité la plus grande possible.

Nous nous occuperons spécialement désormais des ensembles réguliers; un tel ensemble est défini par des points fondamentaux A_n limites des B_n^h lorsque h augmente indéfiniment et par les grandeurs des carrés d'exclusion B_n^h attachés à A_n (1). L'ensemble dérivé des points fondamentaux A_n est un ensemble fermé A'; dans le cas général, cet ensemble A' se compose d'un ensemble parfait et d'un ensemble réductible; les intervalles

(1) Il semble qu'il y aurait lieu de considérer aussi les positions relatives de A_n dans ces carrés; mais on peut s'arranger, en modifiant légèrement les définitions pour que tout B_n^h ait pour centre le point A_n.

d'exclusion qui correspondent aux points de l'ensemble réductible n'ont en commun que les points de cet ensemble réductible lui-même; leur étude ne donne donc rien de nouveau; la partie vraiment intéressante de l'ensemble régulier de mesure nulle est celle qui est attachée aux points de A' qui forment un ensemble parfait; plusieurs cas seraient à distinguer suivant la nature de cet ensemble parfait; nous nous bornerons à considérer le cas où l'ensemble A' comprend tous les points d'une certaine aire, de forme simple, les points A_n sont alors denses dans cette aire (¹); tous les cas où l'aire est d'un seul tenant et à connexion simple se ramènent par la représentation conforme au cas de l'aire limitée par un cercle. Nous allons montrer que, si l'on a deux systèmes différents de points A_n et B_n denses à l'intérieur de cercles égaux, et denses aussi sur les circonférences de ces cercles (²), on peut établir entre ces points une correspondance continue biunivoque et réciproque, les rapports entre la distance de deux points quelconques A_p, A_q et la distance des points correspondants B_p, B_q étant compris entre deux limites aussi rapprochées que l'on veut de l'unité. Il résultera de cette proposition que nous pouvons, sans diminuer la généralité, supposer que les points fondamentaux d'un ensemble de mesure nulle, lorsque ces points sont denses dans un domaine, coïncident avec un ensemble déterminé dense dans ce domaine, par exemple avec les points de coordonnées rationnelles.

II.

La proposition que nous avons en vue peut s'énoncer sous la forme suivante :

Soient deux cercles égaux C et C', et deux ensembles énumé-

(¹) Nous laissons ainsi de côté les ensembles de mesure nulle que l'on pourrait obtenir en supposant que A' est un ensemble parfait linéaire, ou bien un ensemble parfait qui, sans être linéaire, ne contient aucune aire. Par exemple on peut exclure certaines aires fixes autour des points à coordonnées rationnelles et prendre pour A_n les points à coordonnées algébriques qui ne font pas partie des aires exclues; on peut aussi échafauder en quelque sorte plusieurs constructions analogues, ou même une infinité énumérable quelconque de constructions superposées; on obtient ainsi des domaines fort compliqués au point de vue de l'*Analysis situs*.

(²) Le cas où ni l'un ni l'autre ensemble n'aurait de points sur les circonférences se traiterait de la même manière.

rables A et B dont le premier est dense dans C et sur la circonférence C, le second étant dense dans C′ et sur la circonférence C′; on peut, étant donné un nombre arbitrairement petit ε, numéroter les points de A et les points de B, de telle manière qu'à un point du contour corresponde un point du contour et que l'on ait, quels que soient p et q,

$$1-\varepsilon < \frac{A_pA_q}{B_pB_q} < 1+\varepsilon.$$

On dira que les deux ensembles sont *semblables à ε près.*

Pour démontrer ce théorème, nous supposerons que les points des ensembles sont provisoirement rangés dans un ordre déterminé et nous opérerons successivement sur le premier point de A, puis sur le premier point de B, puis sur le second point de A, puis sur le second point de B, etc.; de cette manière, nous ne laisserons échapper aucun des points appartenant à l'un des deux ensembles; à chaque point nouveau que nous considérerons dans l'un des ensembles, nous ferons correspondre un point déterminé de l'autre ensemble; lorsque le tour de ce nouveau point viendrait, il sera omis.

Nous admettrons que les centres des cercles C et C′ ne font pas partie des ensembles A et B (rien ne serait changé s'ils en faisaient partie *tous deux*; on les ferait se correspondre; si l'un d'eux en faisait partie et non pas l'autre, on ferait une représentation conforme très voisine de la transformation identique et transformant l'un des cercles en un cercle égal dont le centre correspond au centre de l'autre cercle). Nous pouvons alors raisonner sur les deux cercles en les considérant comme superposés, mais cependant distincts. Il est possible de choisir deux axes rectangulaires Ox et Oy tels que les diamètres parallèles aux axes ne renferment pas de points A ni B et que toute parallèle aux axes renferme au plus un point A et au plus un point B (car l'ensemble des directions des droites qui joignent le centre aux points A et aux points B, ou qui joignent les points A entre eux, ou les points B entre eux, ou qui sont perpendiculaires aux directions précédentes, est un ensemble énumérable). Nous nous donnerons une suite illimitée de nombres positifs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ tels que l'on ait

$$1-\varepsilon < \prod(1-\varepsilon_n) < \prod(1+\varepsilon_n) < 1+\varepsilon.$$

Le cercle C se trouve partagé par les diamètres parallèles aux axes en quatre régions égales que nous appellerons provisoirement régions 1, 2, 3, 4 ; le cercle C' est partagé en régions homologues que nous désignons de la même manière.

Soit A_1 le premier point considéré de A ; il est situé, par exemple, dans la région 3 ; il est *intérieur* à cette région, à moins qu'il ne soit sur la circonférence, cas que nous réservons pour un instant (puisqu'il ne peut pas être sur les diamètres) ; nous désignerons par A'_1 le point de la région 3 de C' qui coïncide avec A_1 lorsque l'on transporte C' sur C par une translation ; si A'_1 appartient à B nous le désignerons par B_1, mais il n'en sera pas ainsi en général. Nous définirons alors un carré de centre A'_1 et tel que le rapport de la plus grande à la plus petite des plus courtes distances d'un point du carré au contour de la région 3 soit inférieur à $1 + \varepsilon_1$. Cette plus courte distance est parallèle à l'un des axes pour les portions rectilignes du contour et coïncide avec le rayon pour la portion curviligne ; elle n'est pas nulle pour A'_1 d'après nos hypothèses ; la construction du carré est donc toujours possible ; nous choisirons B_1 arbitrairement à l'intérieur de ce carré (si l'on veut éviter d'avoir à faire un choix arbitraire entre une infinité énumérable de points, on prendra celui dont le rang est le moins élevé dans le classement provisoire) ; ce point B_1 étant choisi, nous mènerons par A_1 et B_1 des parallèles aux axes ; ces parallèles jointes aux diamètres déjà tracés diviseront chacun des cercles en régions (au nombre de 9) qui se correspondront deux à deux ; certaines de ces régions (en fait, *une*, en ce cas) sont des rectangles ; les autres sont des quadrilatères ou des triangles dont certains côtés sont des parallèles aux axes, l'un des côtés étant un arc de cercle. Si nous convenons d'appeler en tout cas dimensions d'une région les dimensions de ses côtés rectilignes, il résulte de la construction faite que les rapports entre les dimensions homologues de deux régions correspondantes sont compris entre $1 + \varepsilon_1$ et $1 - \varepsilon_1$ [1]. Dans le cas, que nous avions réservé, où A_1 est sur la circonférence, on choisira aussi B_1 sur la circonférence, de telle

---

[1] On a, en effet, $\frac{1}{1+\varepsilon_1} > 1 - \varepsilon_1$ et, d'après notre construction, les rapports des dimensions homologues sont compris entre $1 + \varepsilon_1$ et $\frac{1}{1+\varepsilon_1}$.

manière que la même condition soit vérifiée relativement aux régions; cela est toujours possible.

Passons maintenant au second point B_2 (que nous prenons dans le second ensemble); nous lui ferons correspondre un point A_2 situé dans la région homologue et choisi de telle manière que les nouvelles régions obtenues en menant les parallèles aux axes par A_2 et B_2 soient telles que le rapport des dimensions de leurs côtés homologues soit compris entre $(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)$ et $(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)$; cette condition conduit à assigner au point A_2 une certaine aire intérieure à la région; on choisit A_2 dans cette aire, soit arbitrairement, soit suivant une loi déterminée comme il a été expliqué pour B_1 en ayant soin de prendre A_2 sur la circonférence C si B_2 est sur la circonférence C'; on continuera de la même manière, en prenant alternativement un point dans A et dans B et lui faisant correspondre un point de l'autre ensemble; après n opérations, on aura des régions, en nombre au plus égal à $(n+2)^2$ et telles que le rapport de deux dimensions homologues de deux régions qui se correspondent soit toujours compris entre

$$(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)\ldots(1-\varepsilon_n)$$

et

$$(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)\ldots(1+\varepsilon_n),$$

c'est-à-dire *a fortiori* entre $1-\varepsilon$ et $1+\varepsilon$. Si l'on continue ainsi indéfiniment, tout point de A et tout point de B sera numéroté, après un nombre fini d'opérations, et aura même un rang au plus égal au double de son rang dans le classement provisoire; le classement satisfait bien aux conditions requises, car, si l'on considère deux points quelconques A_p, A_q et les points correspondants B_p, B_q, lorsque la division par région aura été poussée assez loin (c'est-à-dire après un nombre d'opérations égal au plus grand des nombres p et q), la différence des abscisses x_p et x_q de A_p et A_q est égale à la somme des côtés rectilignes de certaines régions, et la différence des abscisses x'_p, x'_q de B_p et de B_q est égale à la somme des côtés rectilignes de régions correspondantes; on a donc

$$(1) \qquad 1-\varepsilon < \frac{x'_p - x'_q}{x_p - x_q} < 1+\varepsilon$$

et de même

$$(2) \qquad 1-\varepsilon < \frac{y'_p - y'_q}{y_p - y_q} < 1+\varepsilon.$$

d'où l'on déduit immédiatement

$$1 - \varepsilon < \frac{\sqrt{(x'_p - x'_q)^2 + (y'_p - y'_q)^2}}{\sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2}} < 1 + \varepsilon,$$

ce qui est l'énoncé de notre théorème. On démontrerait de même la proposition analogue relative aux angles α et β que font avec l'axe Ox les droites $A_p A_q$ et $B_p B_q$; on a

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{y_p - y_q}{x_p - x_q},$$

$$\operatorname{tang} \beta = \frac{y'_p - y'_q}{x'_p - x'_q}$$

et les équations (1) et (2) donnent immédiatement

$$\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} < \frac{\operatorname{tang} \alpha}{\operatorname{tang} \beta} < \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}.$$

Supposons les angles α et β positifs; ils sont très voisins l'un de l'autre et, par suite, $\cot \beta + \operatorname{tang} \alpha$ est supérieur ou égal à 2; on en conclut, en négligeant ε^2,

$$|\alpha - \beta| < |\operatorname{tang}(\alpha - \beta)| = \left| \frac{\dfrac{\operatorname{tang} \alpha}{\operatorname{tang} \beta} - 1}{\dfrac{1}{\operatorname{tang} \beta} + \operatorname{tang} \alpha} \right| < \frac{1}{2} \left| \frac{\operatorname{tang} \alpha}{\operatorname{tang} \beta} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Les propriétés de la correspondance que nous avons établie entre les deux ensembles dénombrables A et B, denses dans les cercles égaux C et C', mériteraient d'être étudiées d'une manière approfondie; voici quelques remarques qui pourront être utiles dans cette étude. On doit observer d'abord qu'à toute suite partielle A_{n_1}, A_{n_2}, ... tendant vers un point limite P correspond une suite partielle B_{n_1}, B_{n_2}, ... tendant vers un point limite P'; la correspondance entre P et P' est bien définie, c'est-à-dire indépendante de la suite partielle choisie; nous avons donc une correspondance biunivoque entre les points de C et les points de C'.

Convenons d'appeler *droites de discontinuité* les parallèles aux axes menées par les points de l'ensemble; à tout point M non situé sur une droite de discontinuité correspond un point homologue M' et la transformation de la région voisine de M en la région voisine

de M' peut s'écrire sous la forme

$$x' = (h + \varepsilon_1)x,$$
$$y' = (k + \eta_1)y,$$

x, y étant les coordonnées relatives à M; x', y' les coordonnées relatives à M'; h, k des constantes comprises entre $1 - \varepsilon$ et $1 + \varepsilon$; ε_1 et η_1 des fonctions de x et de y qui tendent vers zéro lorsque $x^2 + y^2$ tend vers zéro. Les constantes h et k sont les deux rapports de similitude (parallèlement aux deux axes) des voisinages de M' et de M. Si les points M' et M sont situés sur une ligne de discontinuité, le rapport de similitude dans la direction perpendiculaire à cette ligne n'a pas la même valeur des deux côtés de la ligne; en un point M intersection de deux lignes de discontinuité il y a quatre valeurs pour chaque rapport de similitude, correspondant respectivement aux variations positives et négatives des deux coordonnées. Le rapport de similitude h est ainsi défini dans tout C; c'est une fonction discontinue sur les lignes de discontinuité, mais continue en tout point non situé sur ces lignes.

Si l'on ne sait rien sur le numérotage provisoire des ensembles A et B, on peut dire seulement ceci sur la relation entre ce numérotage provisoire et le numérotage définitif. Le numéro définitif n est au plus égal au double du numéro provisoire p; car tout point numéroté provisoirement A_p ou B_p est choisi après au plus $2p$ opérations; mais on ne peut donner aucune limite supérieure de p en fonction de n.

Il est possible de donner une telle limite, si l'on a eu soin de choisir le numérotage provisoire parmi ceux qui sont *sensiblement homogènes*; voici ce que nous entendrons par là. Par définition, placer un nombre très grand p de points d'une manière *homogène* dans un cercle C, c'est construire un quadrillage formé de carrés et dont p sommets sont intérieurs à C; si α_p est le côté du quadrillage, dans tout carré de côté α_p il y aura un point, et dans tout carré de côté $l\alpha_p$ il y en aura exactement l^2, si l est un nombre entier, et approximativement l^2 si l n'est pas entier. Posons $l\alpha_p = \lambda$ et considérons λ comme fixe et p comme variable; pour chaque valeur de p nous pouvons ainsi calculer le nombre approximatif des points qui sont intérieurs au carré de côté λ; ce nombre est évidemment asymptotiquement égal à $\frac{p\lambda^2}{\pi r^2}$, r étant le rayon du cercle C.

On dira que la répartition des points de l'ensemble dénombrable $A_1, A_2, \ldots, A_p, \ldots$ est asymptotiquement homogène, si, quel que soit le carré de côté λ, le nombre λ_p des points d'indice inférieur à p compris à l'intérieur de ce carré a cette même valeur asymptotique $\frac{p\lambda^2}{\pi r^2}$ lorsque p augmente indéfiniment, c'est-à-dire si le rapport $\frac{\pi r^2 \lambda_p}{p\lambda^2}$ entre le nombre λ_p et la valeur asymptotique $\frac{p\lambda^2}{\pi r^2}$ tend vers l'unité lorsque p augmente indéfiniment, et nous dirons que la répartition est *sensiblement* homogène si ce rapport reste compris entre des nombres fixes α et β ($\alpha < 1 < \beta$), indépendants de p et de la position du carré de côté λ.

Dans la définition précédente de la répartition homogène nous n'avons tenu aucun compte des points situés sur le contour; si le contour est un carré de côté a, le nombre maximum de points situés sur le contour pour un quadrillage de côté $\frac{a}{n}$ est $4n$, le nombre total des points étant n^2. D'une manière générale, le nombre des points du contour sera dit *normal* s'il est de l'ordre de grandeur de la racine carrée du nombre total des points. Il faut observer que cette appellation de normal se réfère à l'hypothèse qu'*il y a* des points sur le contour; si les points étaient placés *au hasard*, on devrait admettre que, *dans le cas général*, il n'y a *aucun point* sur le contour; cette hypothèse est d'ailleurs la plus simple. Mais, *s'il y a* des points sur le contour, c'est qu'il existe une certaine relation entre la manière dont est donné le contour et la manière dont sont choisis les points; il est alors naturel de supposer que la probabilité pour qu'un point tombe sur un arc de longueur égale à l'unité est dans un rapport fini avec la probabilité pour que ce point tombe dans une aire égale à l'unité; cette hypothèse est vérifiée, par exemple, si le contour est un cercle et si les points de l'ensemble sont les points à coordonnées rationnelles; on pourrait imaginer d'autres hypothèses, en relation avec des problèmes de la théorie des nombres.

Nous devons donc, dans le cas où il y a des points sur le contour, ajouter à l'hypothèse que la répartition est sensiblement homogène à l'intérieur, l'hypothèse que la répartition est sensiblement homogène sur le contour.

Dans bien des questions, la définition précédente de la réparti-

tion sensiblement homogène est insuffisante; il faut ajouter une condition, que l'on peut appeler condition d'homogénéité *intrinsèque*, parce qu'elle fait intervenir les positions relatives des points de l'ensemble. Si l'on considère les sommets d'un quadrillage, que nous prenons comme type de l'homogénéité (il en serait de même pour un réseau de triangles équilatéraux), la plus petite distance de deux sommets est proportionnelle à l'inverse de la racine carrée du nombre total des points; nous dirons *qu'un ensemble à deux dimensions est intrinsèquement homogène si la plus petite distance entre deux points dont les rangs sont inférieurs à p est de l'ordre de grandeur* (1) *de* $\frac{1}{\sqrt{p}}$. L'homogénéité de répartition et l'homogénéité intrinsèque sont deux notions distinctes; l'homogénéité de répartition est une condition *nécessaire* (non suffisante) de l'homogénéité intrinsèque.

Étant donné un ensemble énumérable dense dans un cercle (ou dans un carré), il est toujours possible de le numéroter de manière à vérifier les conditions d'homogénéité; un des moyens les plus simples d'y parvenir consiste, après avoir numéroté un certain nombre de points, à tracer un quadrillage assez fin pour comprendre à l'intérieur du cercle un peu plus de carrés qu'il n'y a de points numérotés, et pour que chaque carré (2) renferme au plus un point numéroté : il y a alors certains carrés qui ne renferment pas de points numérotés; on numérotera dans chacun de ces carrés *un* point de l'ensemble, en le choisissant à l'intérieur d'un carré concentrique de dimensions deux fois plus petites et prenant le point d'indice le moins élevé dans le numérotage provisoire (ceci afin d'être sûr de n'oublier aucun point). Tout numérotage qui satisfait aux deux conditions d'homogénéité sera dit *normal*. Il est aisé de se rendre compte que les procédés de numérotage habituellement indiqués pour les ensembles dénombrables usuels (nombres rationnels, quadratiques, algébriques) conduisent à des numérotages normaux.

(1) Une condition analogue doit être vérifiée pour la plus courte distance à la frontière des points très voisins de cette frontière et non situés sur elle.

(2) Pour que ceci soit possible, il faut qu'il n'y ait pas, parmi les points numérotés, des couples trop voisins; s'il en était ainsi, on devrait laisser de côté un point de chacun de ces couples pour le reprendre ultérieurement.

Lorsque les deux ensembles denses dans C et C' sont numérotés normalement, il est possible de s'arranger de manière que la correspondance biunivoque établie entre leurs éléments soit elle-même normale, c'est-à-dire qu'il existe entre le rang provisoire p et le rang définitif n des inégalités de la forme

$$p^{\alpha} < n < p^{\beta},$$

les exposants α et β étant des nombres finis qui ne dépendent que du nombre de dimensions de l'ensemble considéré et du choix de la série convergente $\Sigma\varepsilon_n$ dont on a fait usage. (Pour que l'on puisse être assuré que α et β soient finis, il faut qu'il existe un nombre fini h tel que $\lim n^h \varepsilon_n = 0$.)

On peut supposer que l'ensemble A se subdivise en deux ensembles, tous deux partout denses A' et A'', et que B se subdivise de même en deux ensembles partout denses B' et B''; il est alors aisé de prouver que la correspondance peut être établie de manière que les points de A' correspondent aux points de B' et les points de A'' aux points de B''; il ne suffirait pas, bien entendu, pour cela, d'appliquer le théorème général, d'abord à A' et B', puis à A'' et B'', car la correspondance entre les points P et P' intérieurs à C et C', ainsi établie, ne serait généralement pas la même pour les deux correspondances. On étendrait aisément ceci au cas où A renferme une infinité énumérable de parties aliquotes partout denses, et où il en est de même de B. On peut établir, par exemple, une correspondance biunivoque et continue entre les nombres rationnels intérieurs à un intervalle et les nombres algébriques intérieurs à un intervalle égal, de telle manière qu'aux nombres rationnels dont le dénominateur renferme h facteurs premiers distincts et h seulement correspondent les nombres algébriques qui vérifient une équation irréductible de degré h (pour $h = 1$ ce sont les nombres rationnels; si l'on voulait considérer seulement les nombres algébriques non rationnels, on dirait équation irréductible de degré $h + 1$).

III.

Considérons maintenant deux ensembles réguliers de mesure nulle, dont les points fondamentaux sont précisément les points des ensembles énumérables A et B intérieurs aux cercles C et C'. Si nous supposons que les carrés d'exclusion attachés aux points fon-

damentaux correspondants ont pour côtés des droites qui se correspondent, il est évident que les deux ensembles se correspondront point par point dans la correspondance biunivoque que nous avons établie entre les points P intérieurs à C et les points P' intérieurs à C'. En d'autres termes, *étant donné un ensemble régulier de mesure nulle dont les points fondamentaux* B *sont denses dans* C, *on peut définir un ensemble régulier de mesure nulle dont les points fondamentaux sont les points d'un ensemble déterminé* A *dense dans* C, *de telle manière que les deux ensembles se correspondent d'une manière biunivoque et continue* (le rapport de similitude étant compris entre $1-\varepsilon$ et $1+\varepsilon$).

Donc, pour étudier les ensembles réguliers de mesure nulle dont les points fondamentaux sont denses dans un domaine, on peut, sans restreindre la généralité, supposer que ces points fondamentaux sont, par exemple, les points à coordonnées rationnelles, l'étude en est alors facilitée par l'emploi des propriétés des fractions continues. En particulier, il est très facile de démontrer cette proposition importante : *Tout ensemble régulier de mesure nulle dont les points fondamentaux sont denses dans un domaine a la puissance du continu*. En d'autres termes, si l'on dispose arbitrairement de la décroissance des carrés d'exclusion autour des points fondamentaux, il n'est pas possible de rendre cette décroissance assez rapide pour que les points fondamentaux soient les seuls points de l'ensemble. Plaçons-nous, pour simplifier, dans le cas d'une seule dimension; la démonstration est au fond la même quel que soit le nombre de dimensions. Soient A_n^h les intervalles d'exclusion attachés aux points A_n. Pour chaque valeur de h on peut définir une fonction positive croissante $\varphi_h(n)$ telle que l'on ait

$$\text{mesure}(A_n^h) > \frac{1}{\varphi_h(n)}.$$

D'autre part, étant donnée une suite énumérable de fonctions croissantes $\varphi_h(n)$, il est possible, d'après un théorème bien connu de Paul du Bois-Reymond, de construire une fonction $\varphi(n)$ croissant plus rapidement que chacune de ces fonctions $\varphi_h(n)$. Cette fonction $\varphi(n)$ étant connue, la théorie des fractions continues permet de définir une infinité de nombres irrationnels x (infinité ayant la puissance du continu) tels qu'il existe pour chacun d'eux une

infinité énumérable de relations de la forme

$$\left| x - \frac{m}{n} \right| < \frac{1}{\varphi(n)},$$

m et n étant des entiers. Un tel nombre x appartient, quel que soit h, à au moins l'un des intervalles A_n^h ; il fait donc partie de l'ensemble défini par les points A_n et ces intervalles d'exclusion. Pour définir les nombres x et prouver que leur ensemble a la puissance du continu, il suffit de considérer une fraction continue dans laquelle les quotients incomplets ont une croissance très rapide ; si l'on pose

$$P_{n+1} = a_n P_n + P_n + P_{n-1},$$
$$Q_{n+1} = a_n Q_n + Q_n + Q_{n-1},$$

on admettra que l'on a

$$a_n > \varphi(Q_n),$$

la fonction $\varphi(n)$ étant la fonction que nous venons de définir, on a bien, d'après les propriétés des réduites,

$$\left| x - \frac{P_n}{Q_n} \right| < \left| \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n} \right| = \frac{1}{Q_n Q_{n+1}} < \frac{1}{\varphi(Q_n)}.$$

Or, l'ensemble des systèmes de nombres entiers a_n, qui vérifient les relations $a_n > \varphi(Q_n)$, a évidemment la puissance du continu (¹).

Si l'on voulait avoir des intervalles d'exclusion assez rapidement décroissants pour que l'ensemble défini par ces intervalles se compose des seuls points fondamentaux, il faudrait que l'ensemble des fonctions $\varphi_h(n)$ renferme des fonctions à croissance plus rapide que celle de toute fonction donnée d'avance $\varphi(n)$. Cela n'est pas possible, d'après le théorème de Paul du Bois-Reymond, si les indices h sont énumérables; il faudrait donc attacher à chaque point fondamental une infinité transfinie d'intervalles d'exclusion, les fonctions $\varphi_\alpha(n)$ correspondantes (α désignant un nombre transfini) étant telles que toute fonction croissante $\varphi(n)$ soit dépassée

(¹) Chacun des a_n peut être pair ou impair : l'ensemble des x comprend donc un ensemble de même puissance que l'ensemble des nombres tels que 0,1010110... écrits dans le système de numération binaire.

par l'une d'elles. On sort ainsi du domaine des définitions exprimables au moyen d'un nombre fini de mots.

Pour classer les ensembles réguliers de mesure nulle, il vaut mieux considérer, au lieu des fonctions $\varphi_h(n)$ que nous avons définies, d'autres fonctions $\psi_h(n)$ définies par les relations

$$\sum_{p=n}^{\infty} \text{mesure } A_p^{(h)} = \frac{1}{\psi_h(n)}.$$

La convergence des séries formées par les intervalles d'exclusion de rang h entraîne le fait que les fonctions $\psi_h(n)$ croissent indéfiniment avec n. D'après le théorème de Paul du Bois-Reymond, il existe une fonction $\psi(n)$ croissant moins vite que chacune d'elles et tendant cependant vers $+\infty$ en même temps que n. On a, quel que soit h, pour n assez grand,

$$\sum_{p=n}^{\infty} \text{mesure } A_p^{(h)} < \frac{1}{\psi(n)},$$

c'est-à-dire que les diverses séries formées par les intervalles d'exclusion convergent toutes plus rapidement que la série

$$\sum \left[\frac{1}{\psi(n)} - \frac{1}{\psi(n+1)}\right].$$

Plus la croissance de $\psi(n)$ est rapide, moins l'ensemble de mesure nulle renferme de points, car les intervalles d'exclusion décroissent alors plus rapidement. Il est naturel de prendre la fonction $\psi(n)$ comme définissant ce que l'on peut appeler l'ordre asymptotique de l'ensemble régulier de mesure nulle. On pourra noter ces ordres au moyen des notations employées pour les ordres d'infinitude : $\psi(n) = n^p$ sera dit d'ordre p, $\psi(n) = e^n$ sera d'ordre ω ; e^{e^n} d'ordre ω^2, etc. Ce sont les ensembles d'ordre ω^2 qui interviennent dans la définition des fonctions monogènes non analytiques.

IV.

Il n'est peut-être pas inutile d'insister un peu sur les conclusions générales qui se dégagent de cette étude rapide des ensembles de mesure nulle.

Les ensembles de mesure nulle jouent un rôle fondamental dans la théorie des fonctions; il est, en effet, toujours possible d'enfermer les singularités des fonctions bornées dans des ensembles qui sont, soit de mesure nulle, soit de mesure aussi petite que l'on veut. D'autre part, les ensembles qui ne sont pas de mesure nulle sont formés d'une matière simple, avec des ensembles continus positifs ou négatifs; ils sont hétérogènes au continu; les ensembles de mesure nulle peuvent être, au contraire, sensiblement homogènes au continu, c'est-à-dire identiques à eux-mêmes dans des intervalles aussi petits que l'on veut. Pour ces diverses raisons, la notion d'ensemble de mesure nulle est primordiale; mais c'est en même temps une notion si générale que l'on ne peut espérer approfondir réellement l'étude des propriétés des fonctions qu'en étudiant de plus près cette notion générale, c'est-à-dire en ne confondant pas entre eux tous les ensembles de mesure nulle. La classification basée sur la décroissance asymptotique des intervalles d'exclusion me paraît être un premier pas dans cette étude qui s'impose aux analystes. Il en est d'ailleurs évidemment dans cette question comme dans toutes celles où intervient la notion générale de croissance (comme, par exemple, dans la théorie de la convergence des séries à termes positifs); il se présente des difficultés transfinies que l'on ne peut espérer surmonter entièrement; mais, d'autre part, les problèmes qui se présentent réellement sont généralement, sinon toujours, indépendants de ces difficultés (c'est ainsi que les critères usuels de convergence des séries à termes positifs, quoique théoriquement très particuliers, sont pratiquement suffisants pour traiter les séries qui se présentent dans toutes les recherches analytiques). On peut légitimement espérer qu'il en sera de même dans la classification des ensembles de mesure nulle; théoriquement, la complexité de cette classification dépasse celle de l'étude des séries à termes positifs, étude qui ne sera jamais achevée; pratiquement, un nombre relativement restreint de classes simples suffira pour les besoins effectifs de l'analyse.

En terminant, j'attire l'attention sur une conséquence remarquable du théorème sur la correspondance entre deux ensembles dénombrables partout denses. Il peut sembler naturel, si l'on passe du fini à l'infini dénombrable, de supposer que les positions d'équilibre des centres de gravité des molécules d'un corps solide for-

ment un ensemble dénombrable dense; mais, *a priori*, il aurait pu sembler que c'était une hypothèse absolument arbitraire que de les supposer coïncider avec les points à coordonnées rationnelles; cette définition arithmétique simple semblait n'avoir rien à faire avec la conception physique. En fait, elle n'est évidemment pas nécessaire, mais elle est aussi générale que toute autre : le point important est qu'elle vérifie, comme nous l'avons constaté, les conditions d'homogénéité de répartition et d'homogénéité intrinsèque. Les considérations arithmétiques sur l'approximation des nombres par les nombres rationnels sont ainsi l'image des propriétés générales des ensembles denses.

Sur la classification des ensembles de mesure nulle (1).

J'ai indiqué, en 1911 et 1912, dans deux Notes des *Comptes rendus* (2), les principes sur lesquels me paraît devoir reposer la classification et l'étude systématique des ensembles de mesure nulle. Quelques-unes des conséquences de ces principes ont été développées dans une Conférence, faite en octobre 1912, à l'inauguration de l'Institut Rice à Houston (3); je me propose aujourd'hui d'utiliser les propriétés élémentaires des fractions décimales pour étudier et classer certains ensembles de mesure nulle, et de montrer comment les résultats ainsi obtenus, en apparence très particuliers, s'appliquent, en fait, à des cas très généraux.

I. — Les ensembles décimaux de l'espèce (A).

Nous désignerons par n un entier positif quelconque et par $\lambda(n)$, ou plus brièvement par λ, un entier positif fonction de n; nous supposerons que cette fonction n'est pas décroissante, c'est-à-dire que l'on a

$$\lambda(n+1) \geqq \lambda(n). \tag{1}$$

(1) *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XLVII, 1919, p. 1.

(2) *Comptes rendus*, t. 162, p. 579, et t. 164, p. 568.

(3) *Aggregates of zero measure* apud *The Book of the Opening of the Rice Institute*, t. I (Houston, Texas). Le texte français a paru dans le *Bulletin de la Société mathématique*, 1913, sous le titre : *Les ensembles de mesure nulle*.

Nous dirons que la fonction λ appartient au type décimal convergent si la série

$$(2) \qquad \sum \frac{1}{10^{\lambda(n)}}$$

est convergente.

A chaque type de série convergente, telle que

$$(3) \qquad \sum \frac{1}{n^{1+\alpha}} \qquad (\alpha > 0),$$

$$(4) \qquad \sum \frac{1}{n(\log n)^{1+\alpha}} \qquad (\alpha > 0),$$

$$(5) \qquad \sum \frac{1}{n \log n (\log \log n)^{1+\alpha}} \qquad (\alpha > 0),$$

on peut faire correspondre une série convergente telle que (2), en prenant pour λ la plus grande valeur entière vérifiant les égalités

$$(3)' \qquad 10^{\lambda} < n^{1+\alpha},$$

$$(4)' \qquad 10^{\lambda} < n(\log n)^{1+\alpha},$$

$$(5)' \qquad 10^{\lambda} < n \log n (\log \log n)^{1+\alpha}.$$

Les fonctions λ, ainsi définies, seront dites appartenir au type décimal convergent correspondant aux séries (3), (4), (5).

Étant donnée une fonction λ déterminée du type décimal convergent [par exemple, pour fixer les idées, la fonction correspondant à la série (4) avec $\alpha = 1$], nous définirons, à l'aide de cette fonction, un ensemble décimal de l'espèce (A), de la manière suivante :

Cet ensemble E comprend :

1° *tous les nombres décimaux* (¹) *compris entre* 0 *et* 1 ;

2° *les fractions décimales illimitées* ω *comprises entre* 0 *et* 1, *satisfaisant à la condition suivante : une telle fraction décimale étant écrite*

$$(6) \qquad 0,45003999969730004005\ldots,$$

à chaque valeur de l'entier n on fait correspondre un nombre μ *ainsi défini : si le chiffre décimal qui suit le* $n^{ième}$ *n'est ni un* 0

(¹) Dans certaines applications, il peut y avoir intérêt à laisser de côté les nombres décimaux; l'ensemble ainsi modifié sera dit d'espèce (A′).

ni un 9, on prend $\mu = 0$; si le chiffre qui suit le $n^{\text{ième}}$ est 0 ou 9, on prend $\mu = h$, h étant le nombre de chiffres 0 consécutifs (ou de chiffres 9 consécutifs) qui suivent le $n^{\text{ième}}$. Par exemple, pour la fraction (6), *on a :*

$$\begin{array}{lllll} \mu(1) = 0, & \mu(2) = 2, & \mu(3) = 1, & \mu(4) = 0, & \mu(5) = 4, \\ \mu(6) = 3, & \mu(7) = 2, & \mu(8) = 1, & \mu(9) = 0, & \mu(10) = 1, \\ \mu(11) = 0, & \mu(12) = 0, & \mu(13) = 3, & \mu(14) = 2, & \mu(15) = 1, \\ \mu(16) = 0, & \mu(17) = 2, & \mu(18) = 1, & \mu(19) = 0. & \end{array}$$

Le nombre ω *appartient à l'ensemble* E *si l'on a, pour une infinité de valeurs de n,*

$$(7) \qquad \mu(n) \geq \lambda(n)$$

ou, ce qui revient au même, ω *n'appartient pas à* E *s'il existe un entier m tel que la relation*

$$(8) \qquad n > m$$

entraîne

$$(9) \qquad \mu(n) < \lambda(n).$$

Nous conviendrons de dire, pour abréger, que, dans le cas où ω appartient à E, *l'approximation asymptotique de* ω *par les nombres décimaux est supérieure* [1] *ou au moins égale à* λ. Ce langage équivaut, par définition à la propriété exprimée par l'inégalité (7), vérifiée pour une infinité de valeurs de n.

Les ensembles décimaux de l'espèce (A) sont, par définition, tous les ensembles E définis au moyen d'une fonction λ du type décimal convergent. Il est clair que si une fonction λ est asymptotiquement supérieure à λ', l'ensemble E défini par λ est intérieur à l'ensemble E' défini par λ'. On peut donc, en considérant des fonctions λ croissant de plus en plus rapidement, définir des ensembles E de plus en plus étroits. On sait qu'une suite énumérable quelconque $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p, \ldots$ de fonctions croissantes étant

---

[1] De même que l'on dit habituellement qu'une formule approchée donne une *plus grande* approximation qu'une seconde formule, lorsque la différence avec la valeur exacte est *plus petite* pour la première formule que pour la seconde, de même nous disons ici que l'approximation est supérieure à λ lorsque l'erreur est inférieure à $10^{-\lambda}$.

donnée, on peut définir une fonction croissante λ asymptotiquement supérieure à chacune des λ_p. On en conclut que l'ensemble E intérieur à une infinité énumérable quelconque $E_1, E_2, \dots, E_p, \dots$ d'ensembles du type (A) comprend un ensemble E du type (A).

Les ensembles de l'espèce (A) sont visiblement de mesure nulle; nous reviendrons plus loin sur leur définition au moyen de points fondamentaux (les nombres décimaux) et d'intervalles d'exclusion. On arrive plus simplement à l'étude de leurs propriétés principales au moyen de la théorie des probabilités énumérables.

Rappelons les définitions essentielles de cette théorie et le théorème fondamental.

Considérons une infinité énumérable d'événements éventuels $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ pour chacun desquels on a défini deux éventualités opposées, s'excluant mutuellement, l'éventualité favorable dont la probabilité est p_n pour S_n et l'éventualité défavorable dont la probabilité est $q_n = 1 - p_n$. On suppose que les événements sont indépendants [1] et l'on distingue deux cas, le *cas de convergence*, où la série

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n + \dots \tag{10}$$

est convergente, et le cas de *divergence*, où cette série (10) est divergente.

Le théorème fondamental de la théorie des probabilités énumérables est le suivant :

Théorème fondamental. — *La probabilité pour que le cas favorable se produise une infinité de fois est égale à* 0 *dans le cas de convergence et à* 1 *dans le cas de divergence* [2].

---

[1] Dans certains cas, l'indépendance complète n'est pas réalisée, mais les démonstrations faites en supposant l'indépendance restent valables, avec de légères modifications (*voir*, par exemple, la Note V de mes *Leçons sur la Théorie des fonctions*, 2e édition). On pourrait convenir de dire que les événements sont quasi indépendants lorsque la probabilité p_n étant définie dans l'hypothèse où les événements précédents $E_1, E_2, \dots, E_{n-1}$ ont été défavorables, la production d'un événement favorable E_n modifie seulement un nombre limité des probabilités consécutives.

[2] *Voir*, pour la démonstration, mes *Leçons sur la Théorie des fonctions*, 2e édition, ou mon Mémoire *Sur les probabilités dénombrables* (*Rendiconti di Palermo*, t. XXVII, 1909).

Il est essentiel de remarquer que, les cas possibles étant en nombre infini, probabilité o ne signifie pas impossibilité rigoureuse et probabilité 1 ne signifie pas certitude absolue.

La probabilité p_n, pour que les λ chiffres qui suivent le $n^{\text{ième}}$ soient tous égaux à zéro, est

(11) $$p_n = \frac{1}{10^\lambda}.$$

La probabilité pour qu'il y ait au moins λ zéros serait

$$\frac{1}{10^\lambda} + \frac{1}{10^{\lambda+1}} + \frac{1}{10^{\lambda+2}} + \ldots = \frac{10}{9}\,\frac{1}{10^\lambda}.$$

Il faudrait doubler la probabilité, si l'on regarde comme favorable le cas où il y a au moins λ zéros *ou* λ chiffres 9.

La série (10) est donc identique à la série (2); elle est convergente dans le cas où la fonction λ appartient au type décimal convergent. La probabilité, pour qu'un nombre ω appartienne à l'ensemble E (c'est-à-dire soit tel que son approximation asymptotique par les nombres décimaux soit supérieure à λ), est donc égale à zéro.

Si l'entier λ fonction de l'entier n est tel que la série (2) soit divergente, la série (10) est également divergente et la probabilité pour que le cas favorable se produise une infinité de fois est égale à 1. Ceci revient à dire que la probabilité pour que l'approximation asymptotique d'un nombre ω soit supérieure à λ est maintenant égale à 1.

On peut tirer de là une conséquence intéressante, tout à fait analogue au théorème que j'ai démontré à propos des fractions continues dans les Mémoires cités.

Soient λ_1 et λ_2 deux fonctions de n (λ_1 sera supposé asymptotiquement inférieur à λ_2; λ_1 et λ_2 sont des nombres entiers non décroissants); nous dirons que l'approximation asymptotique d'un nombre ω par les nombres rationnels est comprise entre λ_1 et λ_2 si, la fonction $\lambda(n)$ étant définie comme plus haut, il existe un entier m tel que l'inégalité

(12) $$n > m$$

entraîne

(13) $$\mu(n) < \lambda_2(n)$$

et si, d'autre part, on a pour une infinité de valeurs de n

$$\mu(n) < \lambda_1(n). \tag{14}$$

Considérons les deux séries

$$\sum \frac{1}{10^{\lambda_1(n)}}, \tag{15}$$

$$\sum \frac{1}{10^{\lambda_2(n)}}. \tag{16}$$

Si ces deux séries sont toutes deux convergentes ou toutes deux divergentes, *la probabilité* pour que l'approximation asymptotique de ω par les nombres décimaux soit comprise entre λ_1 et λ_2 *est égale à zéro. Cette probabilité est*, au contraire, *égale à un*, si la série (15) est divergente et la série (16) convergente. On voit donc que, si étroite que puisse paraître la différence de croissance entre les séries convergentes et les séries divergentes, c'est cependant dans cet intervalle que se range un nombre pris au hasard ω, avec une probabilité égale à l'unité. D'une manière précise, si lentement que croisse la fonction $\varphi(n)$, on peut trouver une série divergente à termes positifs

$$\Sigma p_n, \tag{17}$$

telle que la série

$$\sum \frac{p_n}{\varphi(n)} \tag{18}$$

soit convergente.

On pourra, d'autre part, choisir λ_1 tel que la série (15) soit divergente, mais moins divergente que la série (17), et la série (16) convergente, mais moins convergente que la série (18); on aura, par suite,

$$10^{\lambda_2 - \lambda_1} < \varphi(n), \tag{19}$$

c'est-à-dire

$$(\lambda_2 - \lambda_1) \log 10 < \log \varphi(n). \tag{20}$$

La différence entre λ_2 et λ_1 est donc une fonction croissante, mais qui a pu être choisie croissant aussi lentement que l'on veut. Quelque lente que soit la croissance de $\varphi(n)$, du moment que la

série (15) est divergente et la série (16) convergente, la probabilité est *un* pour qu'un nombre ω soit tel que la fonction μ correspondante vérifie l'inégalité (14) pour une infinité de valeurs de n, tandis que l'inégalité (13) est vérifiée sous la condition (12).

A toute fraction décimale illimitée ω, on peut faire correspondre une fonction croissante $n(\sigma)$ définie pour toute valeur entière positive de σ, comme étant la plus petite valeur de n telle que, parmi les n premiers chiffres décimaux de ω, figurent σ zéros consécutifs (qui sont nécessairement les derniers de ces n premiers chiffres, sinon n devait être pris plus petit). Si le nombre ω est tel qu'il ne renferme aucun groupe de plus de $\sigma' - 1$ zéros consécutifs, la fonction $n(\sigma)$ devient infinie pour $\sigma \geqq \sigma'$; la probabilité pour qu'il en soit ainsi est égale à zéro. Dans le cas contraire, la fonction $n(\sigma)$ croît indéfiniment avec σ puisqu'on a $n \geqq \sigma$; dans le cas d'un nombre décimal, on a $n = \sigma + h$ (h étant une constante); la fonction inverse $\sigma(n)$ est donc une fonction non décroissante, qui augmente indéfiniment avec n. On peut, dans les définitions (13) et (14) données plus haut, remplacer $p(n)$ par $\sigma(n)$.

II. — Les ensembles décimaux de l'espèce (B) et de l'espèce (C).

Les ensembles de l'espèce (A) étaient définis dans l'intervalle

(21) $$0 < x < 1;$$

pour les ensembles de l'espèce (B), il nous sera plus commode de considérer l'intervalle

(22) $$0,1 \leqq x < 1.$$

A tout nombre entier positif n, nous pouvons faire correspondre un nombre décimal appartenant à l'intervalle (22) et obtenu en divisant ce nombre entier par une puissance de 10 égale au nombre de ces chiffres. Par exemple, à 17 correspondra 0,17, à 3452 correspondra 0,3452, à 345200 correspondra à 0,345200. Nous considérerons 0,3452 et 0,345200 comme des nombres décimaux distincts; le premier a 4 chiffres décimaux, le second en a 6. Nous attacherons à 0,3452 l'intervalle

(23) $$0,3451 < x < 0,3453$$

et à 0,345200 l'intervalle

$$(24) \qquad 0,345199 < x < 0,345201.$$

Un ensemble décimal de l'espèce (B) est défini par une suite illimitée S d'entiers croissants, ou plutôt par les intervalles tels que (23) ou (24), qui sont attachés aux nombres décimaux correspondant à ces entiers ; un point appartient à l'ensemble s'il appartient à une infinité de tels intervalles.

On peut dire aussi qu'un nombre décimal ω appartient à l'ensemble si, parmi les nombres entiers que l'on obtient successivement, en écrivant à la suite les uns des autres les chiffres décimaux de ω, dans leur ordre naturel, une infinité appartiennent à la suite S. Par exemple, pour le nombre $\pi - 3 = 0,14159265\ldots$, ces entiers sont 1, 14, 141, 1415, 14159, 141592, ...

Soient

$$(25) \qquad n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_p < n_{p+1} < \ldots$$

les entiers croissants qui composent la suite S; cette suite sera dite du type convergent si la série

$$(26) \qquad \sum \frac{1}{n_p}$$

est convergente, et du type divergent si cette série est divergente. Soit α_h le nombre des n_p satisfaisant à la condition

$$(27) \qquad 10^{h-1} \leq n_p < 10^h.$$

Les indices p correspondants vérifient l'inégalité

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{h-1} < p \leq \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_h$$

et la somme des termes correspondants de la série (26) est, par suite, comprise entre $\frac{\alpha_h}{10^{h-1}}$ et $\frac{\alpha_h}{10^h}$.

On en conclut immédiatement que la série (26) est convergente ou divergente en même temps que la série

$$(28) \qquad \sum \frac{\alpha_h}{10^h}.$$

Le nombre de tous les entiers qui peuvent vérifier l'inégalité (27)

est $9 \cdot 10^{h-1}$; la probabilité pour que l'un d'eux, pris au hasard, soit l'un des n_p est donc

$$(29) \qquad p_h = \frac{\nu_h}{9 \cdot 10^{h-1}}.$$

La série

$$(30) \qquad \Sigma\, p_h$$

est donc convergente ou divergente en même temps que la série (26). Si donc des entiers successifs de 1, 2, 3, ..., h, ... chiffres étant pris au hasard, on convient de dire, pour chacun d'eux, que le cas favorable est celui où il coïncide avec l'un des n_p, la probabilité pour que le cas favorable se produise une infinité de fois sera zéro dans le cas de la convergence et l'unité dans le cas de la divergence. Ceci suppose les entiers successifs indépendants; mais il en est de même dans le cas de la convergence, lorsqu'ils sont dérivés d'un certain nombre irrationnel, c'est-à-dire lorsque chacun d'eux s'obtient en écrivant à la droite du précédent un chiffre pris au hasard; dans le cas de la divergence, si la suite d'entiers donnés est spéciale, il n'en est pas de même. Il est nécessaire d'introduire la notion de convergence ou de divergence par intervalles, correspondant à la notion de densité. On dira que la suite des n_p est asymptotiquement homogène, si les séries déduites des séries (26) ou (28), en ne conservant que les termes correspondant à un intervalle donné quelconque $\alpha\beta$ intérieur à l'intervalle fondamental (22), convergent ou divergent *de la même manière* que ces séries (26) ou (28). *Nous réservons le nom d'ensembles de l'espèce* (B) *aux ensembles pour lesquels la suite des n_p est asymptotiquement homogène;* sinon ils seront dits de l'espèce (C). Certains ensembles de l'espèce (C) peuvent être considérés comme sommes d'ensembles partiels dont chacun est de l'espèce (B); ceux qui ne le peuvent pas appartiennent proprement à l'espèce (C).

Les ensembles de l'espèce (A) sont un cas particulier des ensembles de l'espèce (B); les nombres n_p de $h + \mu$ chiffres sont formés de tous les nombres de h chiffres à la droite desquels on a inscrit μ zéros, μ étant une fonction non décroissante de h. L'homogénéité est donc ici aussi grande que possible, sous réserve de l'ordre dans lequel on écrit les nombres de h chiffres; c'est là un point sur lequel nous reviendrons.

Comme exemple d'ensembles de l'espèce (B), on peut citer ceux que l'on obtient en prenant des nombres n_p dans lesquels la fréquence de l'un des chiffres, par exemple du chiffre 7, est constamment supérieure à une fraction supérieure à $\frac{1}{10}$ ou constamment inférieure à une fraction inférieure à $\frac{1}{10}$. Supposons, pour fixer les idées, que la fréquence du chiffre 7 soit inférieure à $\frac{99}{1000}$. Cela signifie que, pour un nombre de k chiffres, le nombre des chiffres 7 est inférieur à $\frac{99k}{1000}$. Si l'on prend $k = 1000$, on voit que les nombres de 1000 chiffres peuvent renfermer 99 chiffres 7, de sorte que leurs 99 premiers chiffres peuvent être pris *d'une manière entièrement arbitraire;* cette remarque est utile pour l'étude de l'homogénéité de l'ensemble.

On obtient aussi des ensembles de l'espèce (B) en prenant au contraire, les nombres n_p dans lesquels les 10 chiffres décimaux figurent tous exactement le même nombre de fois, à une unité près. En d'autres termes, la différence entre le nombre de chiffres 3, par exemple, et le nombre de chiffres 7 est égale à 0, à $+1$ ou à -1.

Les ensembles de l'espèce (B) peuvent être classés d'après le mode de croissance des n_p, mode arbitraire sous réserve de la convergence de la série (26). On aura des valeurs régulières de n_p en prenant les critères de convergences classiques, par exemple :

(31) $$n_p = \mathrm{E}(p^{1+\alpha}),$$

(32) $$n_p = \mathrm{E}[p(\log p)^{1+\alpha}],$$

(33) $$n_p = \mathrm{E}[p \log p(\log_2 p)^{1+\alpha}],$$

$\mathrm{E}(n)$ désignant la partie entière de n et α un nombre *positif* quelconque. Si α était négatif, on aurait des suites du type divergent.

III. — L'approximation des nombres par les nombres décimaux.

Les nombres décimaux compris entre 0 et 1 peuvent être rangés en série simple, d'après la règle suivante : un nombre entier n de p chiffres étant donné, le nombre correspondant est égal à $\frac{n}{10^p}$ si n ne se termine pas par zéro, et à $\frac{n}{10^{p+h}}$ si n se ter-

mine par h zéros. Par exemple, à 34057 correspond 0,34507, et à 24500 correspond 0,00245.

Étant donnée une fraction décimale illimitée comprise entre 0 et 1, par exemple

$$(34)\qquad \alpha = \pi - 3 = 0,14159265\ldots,$$

les nombres décimaux approchés par défaut sont

$$(35)\qquad \begin{cases} u_1 = 0,1, \\ u_{14} = 0,14, \\ u_{141} = 0,141, \\ u_{1415} = 0,1415. \end{cases}$$

D'une manière générale, l'indice du nombre approché à $\frac{1}{10^m}$ près est la partie entière de $10^m\alpha$. Il y a exception lorsque cette partie entière se termine par un zéro ou par plusieurs zéros; si la partie entière de $10^m\alpha$ se termine par h zéros, le nombre u_n, dont l'indice n est la partie entière de $10^{m-h}\alpha$, est approché à $\frac{1}{10^m}$ près.

Par exemple, pour le nombre

$$(36)\qquad \beta = \pi - 3,000092 = 0,14150065\ldots.$$

le nombre u_{1415} est approché à $\frac{1}{10^4}$, à $\frac{1}{10^5}$ et à $\frac{1}{10^6}$ près.

Dans le cas où la virgule est suivie de h zéros, par exemple pour

$$(37)\qquad \gamma = \frac{\pi}{10^{h+1}} = 0,00\ldots03141592\ldots,$$

l'indice du nombre approché à 10^{-n} près est la partie entière de $10^{n-h}\gamma$.

On déduit aisément de là, étant donné un nombre α, l'étude de la fonction qui, pour toutes les valeurs de la variable continue t, est égal au plus petit indice n tel que l'on ait

$$(38)\qquad 0 \leq \alpha - u_n < \frac{1}{t}.$$

On posera

$$x = \log_{10} t \qquad \text{et} \qquad y = \log_{10} n.$$

Pour $t = 10^m$, soit $x = m$, on a, si α est compris entre 0,1 et 1,

$$n = E(10^m\alpha) = 10^m\alpha - \theta \qquad 0 \leq \theta < 1,$$

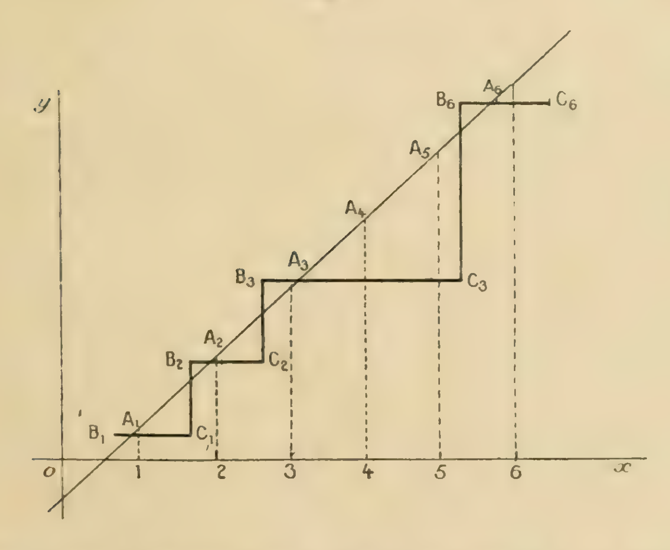
$$y = \log n = \log\alpha + m + \log\left(1 - \frac{\theta}{10^m\alpha}\right),$$

c'est-à-dire que la courbe se compose de traits horizontaux B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3, ... situés respectivement au-dessous des points A_1, A_2, A_3, ... dont les coordonnées sont

$$(A_m) \qquad x = m, \qquad y = \log\alpha + m,$$

la distance du point A_m à la droite B_mC_m étant $\log\left(1 + \frac{\theta}{10^m\alpha}\right)$, c'est-à-dire de l'ordre de $\frac{1}{10^m}$. La position des ordonnées B_2C_1, B_3C_2, ..., par lesquelles on passe d'un trait horizontal au suivant, dépend de la valeur des chiffres successifs de α. Dans le cas où il y a plusieurs zéros consécutifs, le trait horizontal correspondant au dernier chiffre significatif qui précède les zéros se prolonge au moins jusqu'à l'ordonnée qui correspond au rang du

Fig. 1.



dernier zéro. Par exemple, la figure correspond à un nombre α pour lequel les quatrième et cinquième chiffres décimaux sont des zéros.

On peut utiliser cette représentation géometrique pour la définition des ensembles de mesure nulle de l'espèce (A); je n'y insiste pas, mon but actuel étant l'étude de l'approximation des nombres α les plus generaux (c'est-à-dire ne renfermant pas asymptotiquement un nombre exceptionnel de zéros consécutifs). Pour un tel nombre, le nombre decimal u_n, dont l'indice est la partie entière de $10^m\alpha$, donne une erreur $\frac{1}{t}$ qui est, en général, comprise entre $\frac{1}{10^m}$ et $\frac{1}{10^{m+1}}$. L'indice n du nombre u_n qui vérifie les inégalités (38) vérifie donc, en général, les inégalités

$$(39)\qquad t\alpha < n,$$

$$(40)\qquad n < 10t\alpha.$$

Si le nombre α ne renferme pas de zéros, les inégalités (39) et (40) sont toujours vérifiées; s'il renferme des zéros, l'inégalité (40) subsiste toujours; mais, pour certaines valeurs de t, l'inégalité (39) ne subsiste pas.

L'inégalité (40), combinée avec (38), donne

$$(41)\qquad 0 < \alpha - u_n < \frac{10\alpha}{n}.$$

Étant donné un nombre *quelconque* α, il existe une infinité d'entiers n donnant lieu aux inégalités (41).

La série

$$(42)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10\alpha}{n}$$

est divergente; il est évident qu'il n'est pas possible de définir les u_n de telle manière que, pour tout nombre α, on ait les inégalités

$$(43)\qquad 0 < \alpha - u_n < \varphi(n),$$

la série

$$(44)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n)$$

étant convergente. Mais on peut se demander s'il est possible de prendre pour $\varphi(n)$ le terme général d'une série divergente quel-

conque à termes positifs, c'est-à-dire d'une série dont la divergence est plus lente que celle de la série (42); de prendre, par exemple,

$$\varphi(n) = \frac{1}{n \log n},$$

ou encore

$$\varphi(n) = \frac{1}{n \log n \log_2 n}.$$

Ceci exige, bien entendu, qu'on modifie les conventions que nous avons faites pour le numérotage des u_n.

Si la série (44) est divergente, on peut trouver une infinité de groupes successifs de termes dont la somme soit supérieure à 10; soit, par exemple,

$$\sum_{n=h}^{n=k} \varphi(n) > 10. \tag{45}$$

Considérons les valeurs de n satisfaisant à cette condition, et recouvrons l'intervalle 0 — 1 avec des intervalles consécutifs égaux à $\frac{\varphi(n)}{10}$. L'étendue de l'un quelconque de ces intervalles est comprise entre deux puissances consécutives de 10, soit

$$\frac{1}{10^{p+1}} < \frac{\varphi(n)}{10} < \frac{1}{10^p}. \tag{46}$$

Il y a donc un nombre décimal $\frac{A}{10^{p+1}}$, A étant un entier, compris dans cet intervalle; c'est ce nombre que nous désignerons par u_n, et nous lui attacherons l'intervalle qui a ce point pour milieu et qui a pour dimension $\varphi(n)$. Les intervalles assignés ainsi aux nombres u_n dont l'indice est compris entre h et k recouvrent complètement l'intervalle 0 — 1; tout point x appartient donc à l'un au moins de ces intervalles [1]; d'où l'existence d'un nombre n vérifiant l'inégalité (43) et compris entre h et k. Afin de numéroter tous les nombres décimaux, nous assignerons dans l'ordre naturel les numéros supérieurs à k aux nombres qui se trouvent ne pas être encore numérotés et dont le nombre de

---

[1] Nous supposons $\varphi(n)$ décroissant avec n: tout point x appartient alors à plusieurs intervalles, et l'on a non seulement l'inégalité (43) (approximation à droite), mais l'inégalité analogue à gauche.

chiffres décimaux ne dépasse pas celui des nombres déjà numérotés ; on épuisera ainsi les numéros jusqu'à un certain rang h', à partir duquel on prendra dans la série divergente un nombre suffisant de termes pour vérifier l'inégalité (45) (en y remplaçant h par h' et k par k') ; et l'on opérera sur ces termes comme sur les précédents, et ainsi indéfiniment ; il y aura donc pour tout α une infinité de valeurs de n vérifiant l'inégalité (43).

Ce résultat est théoriquement intéressant, mais il n'est pratiquement utilisable que si l'on a effectivement le moyen d'effectuer le numérotage pour toute valeur de n. Lorsque l'on donne effectivement la série $\varphi(n)$, il est généralement possible de donner des procédés pratiques plus simples que le procédé théorique qui vient d'être indiqué ; je ne m'y arrêterai pas.

Parmi les applications possibles de ces considérations, je signale un problème fort intéressant, signalé par M. Paul Lévy dans une séance de la Société mathématique de France, en mars 1919 : le problème du numérotage des fonctions d'une série orthogonale. Il est des cas où le numérotage le plus naturel apparaît immédiatement ; il en est d'autres où la question est plus difficile. On voit que le problème du numérotage naturel des nombres décimaux ne peut pas être résolu asymptotiquement d'une manière tout à fait satisfaisante, si l'on a en vue une approximation aussi bonne que possible, c'est-à-dire une série (44) dont la divergence soit aussi lente que possible. Quelque lente que soit cette divergence, on peut définir un numérotage correspondant, mais ce numérotage ou tout autre étant donné, on trouvera une série divergeant encore plus lentement et telle que le numérotage considéré ne fournisse pas, en général, asymptotiquement l'approximation correspondante.

IV. — Les ensembles réguliers de mesure nulle.

Nous savons que tout ensemble de mesure nulle est compris dans un ensemble régulier E, défini par une double infinité énumérable d'intervalles d'exclusion attachés à une infinité énumérable de points fondamentaux A_n. L'ensemble E_h étant défini par les intervalles $\sigma_{n,h}$, on a

$$\sigma_{n,h+1} \leqq \sigma_{n,h}. \tag{47}$$

Cette inégalité signifiant que $\sigma_{n,h+1}$ est intérieur à $\sigma_{n,h}$, ou coïncide avec lui; si l'on pose

$$e_h = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{n,h}, \tag{48}$$

les nombres e_h tendent vers zéro lorsque h augmente indéfiniment. L'ensemble E est, par définition, l'ensemble des points communs à tous les E_h [d'après (47), tous les points de E_{h+1} appartiennent à E_h].

Nous disons qu'un ensemble régulier est *simple* lorsqu'on a

$$\sigma_{n,h} = \sigma_{n,1} \qquad \text{si } h \leq n \tag{49}$$

et

$$\sigma_{n,h} = 0 \qquad \text{si } h > n. \tag{50}$$

La convergence de la série e_1 entraîne alors le fait que e_n tend vers zéro. A toute série (¹) convergente simple e_1 correspond, d'après les égalités (49) et (50), un ensemble régulier simple que nous appellerons (e_1), tandis que E_1 désigne l'ensemble des points intérieurs à l'ensemble des intervalles e_1. Il est aisé de voir que l'ensemble (e_1) comprend tous les points de l'ensemble régulier E, sauf peut-être les points fondamentaux. Soit, en effet, α un point de E distinct de A_1; ce point étant distinct de A_1, il existe un nombre h assez grand pour que α n'appartienne pas à $\sigma_{1,h}$; comme il appartient à E_h, il appartient à $\sigma_{q,h}$, q étant différent de 1 : il appartient donc à $\sigma_{q,1}$. Donc l'ensemble obtenu en retranchant de E_1 l'intervalle $\sigma_{1,1}$ comprend tous les points de E_1, sauf peut-être A_1, et par suite tous les points de E, sauf peut-être A_1. De même, l'ensemble obtenu en retranchant de E_1 les intervalles $\sigma_{1,1}$, $\sigma_{2,1}$, ..., $\sigma_{n,1}$ comprend tous les points de E, sauf peut-être A_1, A_2, ..., A_n. Donc (e_1) comprend tous les points de E, sauf peut-être les points fondamentaux. Il en est de même, naturellement, de (e_2), (e_3), ..., (e_h), ... Inversement, tout point qui appartient à tous les (e_n) appartient à tous les E_h, et par suite à E. L'ensemble E peut donc être défini, aux points fon-

(¹) Il s'agit, bien entendu, d'une série d'intervalles, c'est-à-dire que chaque terme $\sigma_{n,1}$ de la série est un intervalle *donné* $a_{n,1}$, $b_{n,1}$ d'étendue $\sigma_{n,1}$.

damentaux près, comme l'ensemble des points communs aux ensembles réguliers simples (e_1), (e_2), ..., (e_h), ... Appelons (e) cet ensemble; ceux des points fondamentaux de E qui n'appartiennent pas à (e) seront dits *essentiels*. Lorsque aucun point fondamental n'est essentiel, c'est-à-dire lorsque tous les points fondamentaux de E appartiennent à (e), les ensembles E et (e) sont identiques. Dans ce cas, on peut supprimer un nombre fini quelconque de points fondamentaux et les intervalles correspondant dans les E_h sans modifier E. D'une manière générale, d'ailleurs, on peut supprimer un nombre fini quelconque de ceux des points fondamentaux qui ne sont pas essentiels, sans modifier E.

Dans le cas où les points fondamentaux sont essentiels, on obtient un ensemble régulier simple (f) comprenant E en rangeant dans un ordre quelconque, par exemple par ordre de grandeur décroissante, tous les intervalles qui définissent une infinité des E_h (que l'on choisira assez rares pour que la série Σe_h soit convergente), mais l'ensemble (f) est généralement beaucoup plus étendu que E : il comprend tous les points de (e_1), plus les points fondamentaux. Si, au contraire, on prend les intervalles $\sigma_{n,p}$ en prenant pour chaque valeur de n une seule valeur de p, fonction non décroissante de n, on obtient un ensemble régulier simple compris dans E, et l'on ne peut atteindre E comme limite que par une suite transfinie, vu la transfinité des modes de croissance possibles de la fonction $p(n)$.

De l'ensemble (f), on peut déduire des ensembles F_h ayant pour points fondamentaux des points de E choisis avec un arbitraire très large (si l'on admet la possibilité d'effectuer ainsi une infinité énumérable de choix arbitraires), mais la comparaison de ces ensembles avec l'ensemble E n'est pas sans présenter des difficultés. Il est clair qu'à un point quelconque α on peut attacher une suite indéfinie d'intervalles en prenant d'abord l'intervalle d'indice minimum de (f) renfermant α, puis celui d'indice minimum intérieur au précédent et renfermant α, et ainsi de suite. En ayant soin de choisir un premier point α dans le premier intervalle de (f), puis un second point dans le premier des intervalles non utilisés par le choix précédent, et ainsi de suite, on épuisera tous les intervalles de (f). Mais, même en laissant de côté la difficulté qui résulte de l'infinité de choix, on aperçoit immédiatement combien

cette introduction de points fondamentaux arbitraires est artificielle. Dans la plupart des applications à la théorie des fonctions où se rencontrent des ensembles réguliers, les points fondamentaux sont nettement définis d'après la nature de la question, et l'on ne peut les modifier qu'en introduisant artificiellement des complications surajoutées.

Étant donné un ensemble régulier simple défini par une infinité d'intervalles formant une série convergente, les points de l'ensemble étant ceux qui appartiennent à une infinité d'intervalles, on peut, parmi ces intervalles, en choisir une infinité, tels que tout point de l'ensemble soit intérieur à l'un d'eux et reste intérieur à une infinité des intervalles non choisis. Mais l'application indéfinie de ce procédé ne conduit pas, en général, à une définition déterminée au moyen de points fondamentaux. Par exemple, pour les ensembles de l'espèce B, tels que ceux de la page 47, il n'y a pas de raison naturelle pour regarder certains points comme fondamentaux plutôt que d'autres. La distinction entre les ensembles réguliers pour lesquels les points fondamentaux sont essentiels et ceux pour lesquels les points fondamentaux sont arbitraires mériterait d'être approfondie; elle est essentielle dans certaines applications à la théorie des fonctions.

V. — La comparaison des ensembles de mesure nulle avec les ensembles décimaux et leur classification.

Dans le cas d'ensembles réguliers à points fondamentaux essentiels partout denses, j'ai indiqué (¹) comment on pouvait, en établissant une correspondance biunivoque entre les points de deux ensembles énumérables denses, ramener l'étude des propriétés d'un tel ensemble et des ensembles réguliers correspondant au cas particulier où l'ensemble énumérable est déterminé d'une manière simple, coïncidant par exemple avec l'ensemble des nombres rationnels ou l'ensemble des nombres décimaux.

Je vais donc, ici, me borner au cas des ensembles réguliers simples, pour lesquels les points fondamentaux ne sont pas donnés. Nous allons faire voir qu'un tel ensemble peut être considéré

(¹) *Bulletin de la Société mathématique*, 1913; plus haut, p. 20.

comme compris entre deux ensembles décimaux de l'espèce (B) différant peu l'un de l'autre et, d'une manière précise, tels que les séries qui leur correspondent ne diffèrent que par un facteur constant (égal d'ailleurs à 100).

Par hypothèse, nous parlons d'un ensemble E défini par une infinité d'intervalles $a_p b_p$ dont les longueurs σ_p forment une série convergente ; les points de E sont les points intérieurs à une infinité de ces intervalles.

La série $\Sigma\sigma_p$ étant convergente, elle a un nombre limité de termes satisfaisant à l'inégalité

$$(51) \qquad \frac{3}{10^{n+1}} < \sigma_p < \frac{3}{10^n},$$

dans laquelle n désigne un nombre donné. Un tel intervalle σ_p est compris dans un intervalle

$$(52) \qquad \frac{A_p - 1}{10^{n-1}}, \quad \frac{A_p + 1}{10^{n-1}},$$

A_p étant un nombre entier et comprenant à son intérieur un intervalle

$$(53) \qquad \frac{B_p - 1}{10^{n+1}}, \quad \frac{B_p + 1}{10^{n+1}},$$

B_p étant également un nombre entier.

Si nous désignons par m_n le nombre des σ_p qui satisfont à l'inégalité (51), le nombre des intervalles (52) ou (53) sera également m_n. L'ensemble des intervalles (52) a comme somme

$$(54) \qquad S = \sum \frac{m_n}{10^{n-1}}$$

et l'ensemble des intervalles (53) a comme somme

$$(55) \qquad S' = \sum \frac{m_n}{10^{n+1}} = \frac{S}{100}.$$

La somme des σ_p est comprise entre $\frac{3S}{10}$ et $\frac{3S}{100}$.

La suite des A_p définit un ensemble décimal de l'espèce B ou de l'espèce (C), suivant qu'elle est ou non asymptotiquement homogène ; de même la suite des B_p ; l'ensemble E est compris dans le

premier de ces ensembles et comprend le second ; les séries correspondantes S et S′ sont identiques au point de vue de la convergence, de sorte que la classification, à ce point de vue, de tous les ensembles réguliers simples se ramène à celle que nous avons faite pour les ensembles décimaux. Nous dirons qu'ils appartiennent à l'espèce (B) ou à l'espèce (C), suivant que l'ensemble décimal correspondant appartient lui-même à l'espèce (B) ou à l'espèce (C). Cette classification revient à considérer, en définitive, la rapidité de la convergence de la série

$$\sigma = \Sigma \sigma_p$$

et des séries qui s'en déduisent lorsqu'on ne conserve que les σ_p correspondant à certains intervalles. Si toutes ces séries ont des convergences comparables, l'ensemble de mesure nulle sera dit *asymptotiquement homogène* et sa *densité asymptotique* pourra être représentée par un symbole représentant la convergence de la série (56), c'est-à-dire le mode de décroissance de la fonction

$$\sigma - \sum_{1}^{n} \sigma_p = \theta(n).$$

Cette fonction $\theta(n)$ tend vers zéro lorsque n augmente indéfiniment ; son ordre de croissance est, par définition ([1]), opposé à celui de la fonction inverse $\frac{1}{\theta(n)} = \varphi(n)$; si $\varphi(n) = n^k$, l'ordre de $\varphi(n)$ est k et celui de $\theta(n)$ est $-k$.

Les ensembles que l'on peut définir au moyen de classes particulières de nombres, tels que les nombres rationnels, les nombres algébriques, présentent une homogénéité asymptotique analogue à celle des nombres décimaux. Au sujet de l'approximation d'un nombre arbitraire α par les nombres algébriques, par exemple, on pourrait répéter les remarques analogues à celles que nous avons faites pour les nombres décimaux.

Les nombres rationnels réels et positifs sont les racines des équations

$$qx - p = 0. \tag{56}$$

([1]) Voir mes *Leçons sur les séries à termes positifs*.

Donnons à p et q les valeurs satisfaisant aux inégalités

(57) $$0 < p < n,$$
(58) $$0 < q < n$$

et cherchons combien de valeurs de p et de q fournit pour l'équation (56) une racine comprise entre x_1 et x_2. Le nombre des valeurs possibles de p et de q est n^2 ; lorsque n est très grand, le nombre des valeurs cherchées est asymptotiquement égal à

$$\frac{n^2}{2}(x_2 - x_1)$$

si $x_1 < x_2 < 1$ et à

$$\frac{n^2}{2x_1x_2}(x_2 - x_1)$$

si $1 < x_1 < x_2$. Ceci revient à dire que la valeur asymptotique de la probabilité pour que l'équation (56) ait une racine comprise entre x et $x + dx$ est

$$\frac{dx}{2} \quad \text{pour } 0 < x < 1,$$
$$\frac{dx}{2x^2} \quad \text{pour } 1 < x < \infty,$$

cette valeur asymptotique étant définie, bien entendu, par rapport aux inégalités (57) et (58) ; elle prendrait une autre valeur si l'on prenait un domaine d'une forme différente.

Le résultat serait le même si l'on adjoignait aux inégalités (57) et (58) la condition que p soit premier avec q.

Considérons maintenant une équation du second degré à coefficients entiers

(59) $$rx^2 + 2qx + 2p = 0,$$

et considérons les inégalités

(57) $$0 < p < n,$$
(58) $$0 < q < n,$$
(60) $$-n \leq r \leq n,$$

la condition pour que l'équation ait une racine et une seule comprise dans l'intervalle $x_2 - x_1$ se traduira par l'inégalité

(61) $$(rx_1^2 + 2qx_1 + 2p)(rx_2^2 + 2qx_2 + 2p) < 0$$

qui, dans l'espace p, q, r, représente le dièdre de deux plans dont l'angle est donné par la formule

$$(62) \qquad \sin\varphi = \frac{2(x_1 - x_2)(x_1 x_2 + 2)}{(x_1^2 + 2)(x_2^2 + 2)}.$$

Lorsque φ est infiniment petit, la probabilité pour que l'équation (59) ait *deux* racines dans l'intervalle $x_2 - x_1$ est du troisième ordre, car cette probabilité correspond au volume compris entre la surface du cône

$$(63) \qquad q^2 - 2pr = 0$$

et deux plans tangents infiniment voisins à ce cône.

Pour étendre aux équations algébriques de degré n les considérations géométriques sur lesquelles nous nous sommes appuyés pour les équations des deux premiers degrés, il y aurait lieu de considérer dans l'espace à $n+1$ dimensions la représentation paramétrique du cône à deux dimensions décrit par le point représentatif des $n+1$ coefficients, lorsque l'équation a n racines égales et des développables successives qui s'en déduisent et correspondent aux cas de $n-1$, $n-2$, ..., 2 racines égales. Je signale en passant les avantages que présente l'introduction de ces figures géométriques dans l'étude des équations algébriques au point de vue de l'égalité des racines.

VI. — La valeur absolue de la classification asymptotique des ensembles de mesure nulle et ses applications a la théorie des fonctions.

La classification asymptotique qui vient d'être donnée pour les ensembles de mesure nulle repose sur leur définition au moyen d'un choix particulier d'intervalles ; on peut se demander si cette classification a une valeur absolue, c'est-à-dire si, étant donné un ensemble de mesure nulle défini au moyen d'intervalles satisfaisant à une certaine loi asymptotique, il n'est pas possible d'obtenir le même ensemble au moyen d'une loi asymptotique différente. L'étude complète de cette question paraît présenter des difficultés transfinies, si l'on veut y faire intervenir les modes de décroissance non comparables entre eux ; mais il est cependant possible de mon-

trer que la classification asymptotique a effectivement une valeur absolue. D'une manière précise, nous allons prouver sur un exemple qu'*étant donné un ensemble de mesure nulle* E *bien déterminé et une série à termes positifs également bien déterminée, il est des cas où il n'est pas possible d'enfermer tous les points de* E *dans des intervalles asymptotiquement inférieurs à ceux de la série donnée.*

L'ensemble E sera donné, par exemple, sur l'intervalle o — 1; la série à termes positifs donnée ayant pour terme général u_n, nous prouverons que, *quels que soient les nombres* v_n *satisfaisant à la condition*

$$(64) \qquad v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots \leq 1$$

et tel de plus qu'il existe un entier m tel que l'inégalité

$$(65) \qquad n > m$$

entraîne

$$(66) \qquad v_n \leq u_n,$$

il n'est pas possible d'enfermer tous les points de E *dans des intervalles de dimensions* $v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$

Nous allons prendre pour E l'ensemble décimal d'espèce A défini par la condition que, pour tout α faisant partie de E, il arrive pour une infinité de valeurs de p que les chiffres décimaux, dont le rang est compris entre 10^p et $10^p - p^2$, sont tous des zéros [1]; et, d'autre part, nous allons prendre

$$(67) \qquad u_n = \frac{1}{10^n}.$$

Nous allons démontrer d'abord qu'il n'est pas possible d'en-

---

[1] En réalité, l'ensemble E que nous considérons est un cas particulier des ensembles de l'espèce (A); au lieu de $10^p + p^2$, nous pourrions considérer $10^p - \log p$, car ici nous portons notre attention seulement sur les groupes de chiffres) qui commencent à des rangs assignés d'avance, à savoir les rangs 10^p; nous devons donc considérer seulement les probabilités correspondantes et, pour que l'ensemble soit de mesure nulle, il suffit que la série de ces probabilités soit convergente, ce qui est le cas, par exemple, pour la série

$$\sum \frac{1}{10^{\log p}} = \sum \frac{1}{p^{\log p}}.$$

fermer tous les points de E dans des intervalles c_n satisfaisant tous à l'inégalité (66).

En effet, étant donné un intervalle c_n satisfaisant à l'inégalité

$$c_n \leqq \frac{1}{10^n}, \tag{68}$$

cet intervalle est compris à l'intérieur d'un intervalle décimal d'étendue $\frac{2}{10^n}$ dont les extrémités sont $\frac{A_n - 1}{10^n}$ et $\frac{A_n + 1}{10^n}$, A_n étant un nombre entier. Si donc tous les points de E sont intérieurs aux intervalles c_n, ils sont *a fortiori* intérieurs à ces intervalles décimaux. Il suffit donc de montrer que, étant donnée une suite quelconque d'entiers

$$A_1, \quad A_2, \quad \ldots, \quad A_n, \quad \ldots \tag{69}$$

tels que l'on ait $A_n < 10^n$, il y a des points de E extérieurs à tous les intervalles

$$\frac{A_n - 1}{10^n}, \quad \frac{A_n + 1}{10^n}. \tag{70}$$

Nous allons construire un nombre α appartenant à E et n'appartenant à aucun de ces intervalles. Pour qu'un nombre α appartienne à E, il suffit de prendre égaux à zéro ses chiffres décimaux de rangs 10 et 11, de rangs compris entre 100 et 104, entre 1000 et 1009, entre 10000 et 10016, et généralement entre 10^p et $10^p + p^2$, les autres chiffres étant arbitraires. Or, si l'on considère les intervalles (70) correspondant aux valeurs de $n \leqq 11$, il est manifestement possible de choisir les neuf premiers chiffres décimaux de α de manière qu'ils n'appartiennent à aucun de ces intervalles; on choisira de même les chiffres décimaux dont le rang est compris entre 12 et 99, de manière que le nombre α n'appartienne à aucun des intervalles (70) pour $12 \leqq \alpha \leqq 104$, et ainsi de suite. Nous disposons de tous les chiffres décimaux dont le rang vérifie les inégalités

$$10^{p-1} + (p-1)^2 < q < 10^p, \tag{71}$$

de manière que le nombre α n'appartienne à aucun des intervalles (70) dont le rang vérifie les inégalités

$$10^{p-1} + (p-1)^2 < n \leqq 10^p + p^2. \tag{72}$$

Posons, pour un instant :

$$10^{p-1}(p+1)^2 = a,$$
$$10^{p^2} = b;$$

l'ensemble des chiffres décimaux dont le rang q vérifie les inégalités (71) constitue un nombre N de $b - a - 1$ chiffres; ce nombre est entièrement arbitraire, c'est-à-dire peut être choisi de 10^{b-a-1} manières différentes [1]. Pour que le nombre α correspondant puisse appartenir à l'intervalle (70) pour $n = a + 1$, il faudrait, tout au moins, que le premier des chiffres de N coïncidât avec le dernier chiffre de $A_{a+1} - 1$ ou avec le dernier chiffre de A_{a+1}; les nombres N qui satisfont à cette condition sont au nombre de 2.10^{b-a-2}; il y a de même 2.10^{b-a-3} nombres N tels que α puisse appartenir à l'intervalle (70) pour $n = a + 1$; il y en a deux tels que α puisse appartenir à l'intervalle (70) pour $n = b$; il y en a également deux au plus pour chacun des intervalles (70) dont le rang est compris entre b et $b + p^2$; en définitive, nous serons sûrs que α n'appartient à aucun des intervalles (70) pour n vérifiant les inégalités (72) si nous excluons pour N un nombre de valeurs égal à

$$2(10^{b-a-2} + 10^{b-a-3} + \ldots + 10 + 1) + p^2,$$

nombre manifestement inférieur à 10^{b-a-1}, qui est le nombre des choix possibles pour N. Il sera donc possible de choisir N, d'une manière déterminée [2], et le même choix pourra être fait pour chaque valeur de p: on définit donc un nombre α de E qui n'appartient à aucun des intervalles (70).

Supposons maintenant que l'inégalité (68) ne soit pas vérifiée pour toute valeur de n, mais seulement pour les valeurs vérifiant l'inégalité (65), on a de plus l'inégalité (64); la somme de tous les c_n est donc inférieure à $1 - h$, h étant une longueur déterminée: l'un au moins des $n - 1$ intervalles qui subsistent sur l'intervalle $0 - 1$ lorsqu'on en exclut $c_1, c_2, \ldots, c_n$ est donc supérieur à $\frac{h}{n+1}$; quelque petit que soit h, on pourra prendre n assez grand pour

[1] Chacun des $b - a - 1$ chiffres peut, en effet, être pris de dix manières différentes (y compris zéro).

[2] On pourra prendre par exemple pour N le plus petit des nombres entiers parmi tous ceux qui sont possibles d'après les conditions imposées.

que l'on ait

$$(67)\qquad \frac{h}{n+1} > \frac{1}{10^{n-1}};$$

si, de plus, n est pris assez grand pour vérifier l'inégalité (65), on n'aura qu'à considérer, à la place de l'intervalle $0 - 1$, l'un des intervalles obtenus en excluant $c_1, c_2, \ldots c_n$ et dont l'étendue, d'après (67), est supérieure à $\frac{1}{10^{n-1}}$; on n'aura qu'à raisonner sur cet intervalle comme nous avons fait sur l'intervalle $0 - 1$.

Nous pouvons donc, étant donné un ensemble de mesure nulle E, compris dans l'intervalle $0 - 1$, convenir de dire que sa *mesure asymptotique* est inférieure ou égale à une série convergente donnée Σu_n de somme < 1, s'il est possible d'enfermer les points de E à l'intérieur d'intervalles respectivement égaux à u_n; au contraire, la mesure asymptotique de E sera dite supérieure ou égale à la série Σu_n s'il n'est pas possible d'enfermer tous les points de E dans des intervalles respectivement égaux aux u_n. Si une série Σv_n est telle que le rapport $\frac{v_n}{u_n}$ tend vers zéro, un ensemble dont la mesure asymptotique est *inférieure ou égale* à Σv_n aura, par définition, une mesure asymptotique *inférieure* à Σu_n. On définirait de même une mesure asymptotique *supérieure* à Σu_n comme une mesure *supérieure ou égale* à une série Σv_n telle que $\frac{v_n}{u_n}$ augmente indéfiniment avec n.

La notion de *mesure asymptotique* des ensembles de mesure nulle me paraît avoir, en théorie des fonctions, une importance au moins égale à l'importance de la notion de mesure nulle. On sait qu'au point de vue des applications à la théorie des fonctions, les ensembles se divisent en deux grandes classes : les ensembles de mesure nulle et les ensembles de mesure non nulle; lorsque la mesure d'un ensemble n'est pas nulle, il importe généralement peu qu'elle ait telle ou telle valeur; de même que, lorsqu'un nombre variable ne devient ni nul ni infini, il importe peu qu'il soit compris entre a et A ou entre b et B.

Il y aurait intérêt à étudier les transformations ponctuelles les plus générales qui laissent invariante la propriété pour un ensemble d'être de mesure nulle (et par suite la propriété d'être de mesure non nulle); ces transformations laisseraient également invariante la mesure asymptotique.

Lorsqu'un ensemble de mesure nulle est défini par une infinité convergente d'intervalles $\Sigma\sigma_n$, telle que tout point de l'ensemble soit intérieur à une infinité des σ_n, on peut définir également la mesure asymptotique comme inférieure ou égale à la série $\Sigma\sigma_n$; il est alors inutile d'introduire la restriction analogue à $\Sigma u_n \leq 1$.

Dans la théorie de la mesure asymptotique, un rôle essentiel est joué par le théorème de Paul du Bois-Reymond sur les suites dénombrables de fonctions croissantes et les théorèmes qui s'y rattachent, sur les types de convergence et de divergence et la transfinité de ces types. En particulier, si une infinité dénombrable d'ensembles de mesure nulle sont tels que la mesure de chacun d'eux E_k est comprise entre deux séries données : Σu_n^k et $\Sigma v_n^{(k)}$, on peut construire deux séries Σu_n et Σv_n telles que la mesure asymptotique de chacun des E_k soit comprise entre ces deux séries, et la mesure de la somme des E_k est également comprise entre Σu_n et Σv_n.

Un ensemble énumérable a une mesure asymptotique inférieure à toute série donnée à l'avance; la réciproque me paraît exacte, mais je n'en possède pas de démonstration entièrement satisfaisante.

A la théorie de la mesure asymptotique, on doit rattacher celle de la convergence asymptotiquement uniforme d'une série de fonctions, ou d'une suite convergente. Nous dirons qu'une série de fonctions positives

$$(68) \qquad \Sigma f_n(x)$$

a une convergence asymptotiquement uniforme dans un intervalle s'il existe une série convergente à termes positifs

$$(69) \qquad \Sigma u_n$$

telle que, quel que soit x_0 dans les intervalles, on ait

$$(70) \qquad \lim \frac{f_n(x_0)}{u_n} = 0.$$

Si l'on prend, par exemple,

$$f_n(x) = \frac{2x[n(n+1)x^2 - 1]}{[1+n^2x^2][1+(n+1)^2x^2]},$$

la série (68) a une convergence asymptotiquement uniforme dans tout l'intervalle, car si l'on prend

$$u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}},$$

on a bien, pour toute valeur de x_0, la relation (70), bien que la série ne soit pas uniformément convergente dans un intervalle comprenant le point $x = 0$.

Lorsqu'une série a une convergence asymptotiquement uniforme, on peut, évidemment, en groupant ses termes en une infinité de groupes renfermant chacun un nombre fini de termes, arriver à prendre pour la série (69) toute série convergente donnée à l'avance.

On peut « définir » des séries convergentes dont la convergence n'est pas asymptotiquement uniforme. Soient, par exemple, α un nombre irrationnel et

$$\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots + \cfrac{1}{a_n + \ldots}}}$$

son développement en fraction continue. Si ce développement est tel que la série

(71) $$\sum \frac{1}{a_n}$$

soit convergente, nous prendrons

(72) $$f_n(\alpha) = \frac{1}{a_n};$$

si la série (71) est divergente, nous prendrons

(73) $$f_n(\alpha) = \frac{1}{n^2 a_n}.$$

Il est clair que, quel que soit x compris entre 0 et 1, la série

(74) $$\Sigma f_n(\alpha)$$

est convergente et, d'autre part, il est évident que, étant donnée une série à convergence aussi lente que l'on veut, on peut définir

un α tel que la série (7) correspondante converge plus lentement que la série donnée.

Mais les séries ainsi « définies » ne sont pas « bien définies » au sens que l'on doit donner à ce terme lorsqu'on se place au point de vue des définitions constructives. La question reste donc ouverte de savoir si, à ce point de vue, il est ou non possible de construire des séries convergentes de fonctions qui ne soient pas à convergence asymptotiquement uniforme [1].

---

[1] Les méthodes de classification indiquées dans cette étude ont été utilisées notamment par M. Valiron.

CHAPITRE II.

LES OPÉRATIONS ET LES DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES.

Généralités.

Après l'étude du domaine vient naturellement celle des opérations simples qui peuvent être effectuées sur les fonctions et servent à les définir, ou, si l'on veut, à les créer. Les analogies avec la biologie sont ici forcément assez vagues ; rien n'est plus varié d'ailleurs que les modes de reproduction et d'évolution des êtres vivants.

Les opérations analytiques les plus simples sont la généralisation naturelle, avec passage à l'infini, des opérations élémentaires que sont l'addition, la multiplication et la division ; les développements en séries et l'intégration dérivent de l'addition et de la multiplication ; la dérivation est la limite d'une division. De nombreux volumes de la Collection ont été consacrés aux séries : séries à termes positifs (**4**), séries divergentes (**3**), séries de polynomes (**6**) (**16**), séries trigonométriques (**11**), développements en séries au moyen du calcul des résidus (**13**), approximation des fonctions (**24**) ; les théories modernes de l'intégration sont étudiées notamment dans (**10**) et (**23**) ; il y aurait lieu de compléter l'exposition de ces théories d'intégration par l'étude des méthodes de M. Denjoy qui généralisent celles de M. Lebesgue et arrivent à donner la solution complète du problème inverse de la dérivation et du calcul des coefficients d'une série trigonométrique.

Dans ces questions, on peut se placer à deux points de vue : au point de vue abstrait le plus général, comme l'ont fait avec succès MM. Lebesgue et Denjoy et, au point de vue concret plus particulier dans lequel on cherche à se borner aux seules fonctions qui peuvent être effectivement définies. C'est toujours la distinction

entre les êtres réels et les êtres possibles. Pour bien marquer ce second point de vue, je reproduis ci-après des extraits d'un Mémoire écrit en réponse à une polémique ouverte par M. Lebesgue; j'en ai supprimé tout ce qui ne me paraissait pas avoir un intérêt purement scientifique.

On trouvera auparavant une Note ancienne *sur le changement de l'ordre des termes d'une série semi-convergente*, et un Mémoire *sur les fonctions de deux variables réelles* et leur développement en séries indéfiniment dérivables de forme bien déterminée ; ce Mémoire me paraît pouvoir intéresser les chercheurs par la méthode qui y est suivie et qui s'appliquerait certainement avec succès à d'autres problèmes; le théorème de Paul du Bois-Reymond sur les fonctions croissantes [1] me paraît y passer, pour la première fois, du domaine théorique dans le domaine pratique de l'utilisation effective.

Sur le changement de l'ordre des termes d'une série semi-convergente [2].

On sait que, lorsqu'une série est convergente sans que la série des modules de ses termes le soit, c'est-à-dire est semi-convergente, sa valeur dépend, en général, de l'ordre dans lequel on écrit ses termes. Les opérations sur ces séries exigent donc, pour être rigoureuses, des précautions très grandes. Il n'en serait pas de même, si l'on connaissait, d'une manière précise, les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un changement dans l'ordre des termes d'une série semi-convergente n'altérât pas sa valeur. Il paraît difficile de les trouver complètement, mais on peut du moins indiquer certaines conditions suffisantes dont la connaissance pourra peut-être parfois être utile. C'est ce que je me propose de faire : je me bornerai aux séries à termes réels ; car on verra facilement que les théorèmes s'étendent immédiatement aux séries à termes imaginaires; il suffit de remplacer dans l'énoncé *valeur absolue* par *module*. Une série à termes imaginaires peut en effet

---

[1] *Voir* (1) Note II.

[2] *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. XIV, 1890, p. 97.

être considérée comme formée de deux séries à termes réels, unies par le symbole i.

Considérons donc une série semi-convergente à termes réels

$$U = u_1 + u_2 + \ldots + u_m + \ldots$$

et écrivons ses termes dans un ordre différent; nous obtenons la nouvelle série

$$V = v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots.$$

Par hypothèse, il existe entre les entiers m et n une correspondance univoque, telle que $u_m = v_n$ lorsque m et n se correspondent. Posons

$$|m - n| = \alpha_m,$$

α_m est le *déplacement* du terme de rang m. Désignons par λ_m la plus grande des valeurs que prend α_μ lorsque μ varie de 1 à m et posons

$$m + \lambda_m = p_m.$$

La suite

$$p_1, \quad p_2, \quad \ldots, \quad p_m, \quad \ldots$$

se compose de nombres entiers croissant sans limite avec m. D'autre part, pour que p_m augmente indéfiniment, il faut évidemment que m augmente indéfiniment. On a d'ailleurs, d'après la définition de p_m,

$$p_{m+1} - p_m \geqq \lambda_{m+1} - \lambda_m + 1.$$

Cela posé, cherchons à évaluer la somme V_p des p premiers termes de la série V. Nous pouvons toujours déterminer m de manière que l'on ait

$$p_m \leqq p < p_{m+1}.$$

Il en résulte

$$p - p_m \leqq \lambda_{m+1};$$

on a donc

$$V_p = V_{p_m} + \sigma,$$

σ étant la somme d'au plus λ_{m+1} termes de la série V, dont les rangs dépassent le $p_m^{\text{ième}}$. Ces termes occupaient donc dans la série U un rang au moins égal à $m+1$. Par suite, si l'on désigne par η_{m+1} le maximum de la valeur absolue des termes de la série U qui suivent le $m^{\text{ième}}$, on aura

$$\sigma = \theta\lambda_{m+1}\eta_{m+1} \qquad (-1 < \theta < 1).$$

Évaluons maintenant V_{p_m}. Parmi les p_m premiers termes de la série V se trouvent certainement les m premiers termes de la série U ; et, en outre, $p_m - m = \lambda_m$ termes de cette même série, pris parmi ceux qui suivent le $m^{\text{ième}}$. On a donc

$$V_{p_m} = U_m + \theta\lambda_m \tau_{1m+1} \qquad (-1 < \theta' < +1).$$

Il en résulte

$$V_p = U_m + \theta'\lambda_m \tau_{1m+1} + \theta\lambda_{m+1}\tau_{1m+1}.$$

Supposons que l'on ait

$$\lim(\lambda_m \tau_{1m}) = 0 \qquad \text{pour} \qquad m = \infty,$$

et faisons croître p indéfiniment ; p_{m+1} croît aussi indéfiniment, et il en est de même de m. Le second membre a donc pour limite U. Donc le premier membre a une limite V qui est précisément égale à U. Nous sommes donc arrivés au résultat suivant :

« Pour qu'un changement dans l'ordre des termes d'une série (semi-convergente) n'altère pas sa somme, il suffit que le produit du déplacement maximum des termes qui précèdent le $m^{\text{ième}}$ par la valeur absolue maximum des termes qui suivent le $m^{\text{ième}}$ ait pour limite zéro lorsque m augmente indéfiniment. »

On peut donner à cet énoncé deux formes un peu différentes, peut-être plus commodes pour certaines applications.

Soit $u_{m'}$ le terme qui a la plus grande valeur absolue parmi ceux qui suivent le $m^{\text{ième}}$. On a évidemment

$$\tau_{1m} = \tau_{1m'} = |u_{m'}|, \qquad \lambda_m \leqq \lambda_{m'}.$$

Donc

$$\lambda_m \tau_{1m} \leqq \lambda_{m'}\tau_{1m'} = \lambda_{m'}|u_{m'}|.$$

Si l'on suppose que $\lambda_{m'}|u_{m'}|$ tende vers zéro lorque m' augmente indéfiniment, $\lambda_m \tau_{1m}$ tendra aussi vers zéro. On a donc l'énoncé suivant :

« Pour qu'un changement dans l'ordre des termes d'une série n'altère pas sa valeur, il suffit que le produit de la valeur absolue du terme de rang m par le déplacement maximum des termes qui le précèdent tende vers zéro (pour m infini). »

Soit de même, parmi les termes qui précèdent le $m^{\text{ième}}$, u_μ celui

dont le déplacement α_μ est le plus grand. On a

$$\lambda_\mu = \alpha_\mu \geq \lambda_m, \qquad \eta_\mu \geq \eta_m.$$

Donc

$$\alpha_\mu \eta_\mu \geq \lambda_m \eta_m.$$

Faisons croître m indéfiniment : si λ_m reste fini, $\lambda_m \eta_m$ tend évidemment vers zéro ; si λ_m augmente indéfiniment, il en est de même de α_μ et par suite de μ ; par conséquent, si $\alpha_\mu \eta_\mu$ tend vers zéro lorsque μ augmente indéfiniment, il en sera de même de $\lambda_m \eta_m$ lorque m augmentera indéfiniment. On peut donc donner ce troisième énoncé :

« Pour qu'un changement dans l'ordre des termes d'une série n'altère pas sa valeur, il suffit que le produit du déplacement du terme de rang m par la valeur absolue maximum des termes qui le suivent tende vers zéro lorsque m augmente indéfiniment. »

Comme application, considérons la série

$$S = 1 - \frac{1}{2\,L\,2} + \frac{1}{3\,L\,3} - \frac{1}{4\,L\,4} + \ldots = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots.$$

Écrivons-la

$$S' = 1 + \frac{1}{3\,L\,3} - \frac{1}{2\,L\,2} + \frac{1}{5\,L\,5} + \frac{1}{7\,L\,7} - \frac{1}{4\,L\,4} + \ldots = v_1 + v_2 - v_3 + \ldots,$$

c'est-à-dire posons

$$u_{2n} = v_{3n},$$
$$u_{4n+1} = v_{3n+1},$$
$$u_{4n+3} = v_{3n+2}.$$

On a $\lambda_n < n$. Donc $|\lambda_n u_n| < \frac{1}{Ln}$, quantité qui tend vers zéro lorsque η augmente indéfiment. On a donc $S' = S$. On sait, au contraire, que si l'on pose

$$T = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots,$$

$$T' = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots,$$

on a

$$T' = \frac{3}{2}\,T.$$

On a démontré que les conditions données sont suffisantes. Vu la grande variété de séries qui peut exister, il est à peu près certain qu'on ne peut énoncer d'une manière bien précise des conditions nécessaires ; mais on peut du moins se demander s'il n'est pas possible de remplacer les conditions trouvées par d'autres plus simples, ou plus générales. Il est naturel, par exemple, de rechercher s'il ne suffit pas que le produit de la valeur absolue du terme de rang m par son déplacement tende vers zéro lorsque m augmente indéfiniment ; car cette condition ressemble extrêmement à celles que l'on a trouvées. On peut montrer cependant qu'elle n'est pas suffisante et faire voir, par un exemple, qu'un changement dans l'ordre des termes dans lequel elle est remplie peut rendre divergente une série convergente.

Posons, pour abréger l'écriture, $\overline{n} = \dfrac{1}{n\,\mathrm{L}\,n}$ et considérons la série

$$\Sigma = \underline{\overline{2} - \overline{1} + \overline{3} - \overline{4}} - \underline{\overline{10} + \overline{9} - \overline{8} + \overline{7} - \overline{6} - \overline{5} + \overline{11} - \overline{12} + \overline{13} - \overline{14} + \overline{15} - \overline{16}}$$
$$\underline{- \overline{136} + \overline{135} - \ldots + \overline{17} - \overline{137} - \overline{138} + \ldots + \overline{255} - \overline{256}} + \ldots$$

(Les termes sont disposés par groupes, de manière que dans chacun d'eux le dernier terme soit $-\overline{2^{2^n}}$ et que les $\dfrac{2^{2^n} - 2^{2^{n-1}}}{2}$ premiers termes de chaque groupe soient rangés dans l'ordre des valeurs absolues croissantes et les $\dfrac{2^{2^n} - 2^{2^{n-1}}}{2}$ derniers dans l'ordre des valeurs absolues décroissantes.)

Je dis d'abord que la série Σ est convergente et a même somme que la série S déjà considérée. En effet, la somme des 2^{2^n} premiers termes est la même dans les deux séries, et l'on voit facilement que, h étant inférieur à $2^{2^{n+1}} - 2^{2^n}$, la somme de h termes de la série Σ suivant le $2^{2^n\text{ième}}$ tend vers zéro lorsque n augmente indéfiniment. (Il suffit, pour le démontrer, de s'appuyer sur ce que la valeur d'une somme composée de termes alternativement positifs et négatifs est inférieure en valeur absolue à celui des termes dont la valeur absolue est la plus grande.)

Ce point étant admis, échangeons les termes de la série Σ de la manière suivante : dans chaque groupe de $2^{2^n} - 2^{2^{n-1}}$ termes, permutons le dernier terme négatif avec le premier terme positif, l'avant-dernier terme négatif avec le second terme po-

sitif, etc., jusqu'à ce que ce groupe se compose de $\frac{2^{2^n} - 2^{2^{n-1}}}{2}$ termes négatifs consécutifs, suivis d'autant de termes positifs. Le déplacement de chaque terme (augmenté ou diminué d'une unité) est égal au double de son rang compté, dans un sens ou dans l'autre, à partir du milieu du groupe auquel il appartient. Or ce rang est toujours inférieur à l'entier qui figure le terme, puisque cet entier augmente d'une unité à chaque rang lorsqu'on s'éloigne du milieu d'un groupe. Le produit de chaque terme par son déplacement tend donc vers zéro lorsque le rang augmente indéfiniment. Il est cependant facile de voir que la série obtenue est divergente. Elle se compose en effet d'une infinité de groupes de termes de même signe, la somme de chaque groupe ne tendant pas vers zéro. La somme d'un de ces groupes est, en effet, par exemple,

$$\frac{1}{(2^{2^{n-1}}+2)\,\mathrm{L}(2^{2^{n-1}}+2)} + \frac{1}{(2^{2^{n-1}}+4)\,\mathrm{L}(2^{2^{n-1}}+4)} + \dots + \frac{1}{2^{2^n}\,\mathrm{L}\,2^{2^n}}.$$

Or cette somme est évidemment supérieure à

$$\frac{1}{2}\int_{2^{2^{n-1}}}^{2^{2^n}} \frac{dx}{x\,\mathrm{L}x} - \frac{1}{2^{2^{n-1}}\,\mathrm{L}\,2^{2^{n-1}}} = \frac{1}{2}\,\mathrm{L}\,2 - \frac{1}{2^{2^{n-1}}\,\mathrm{L}\,2^{2^{n-1}}},$$

et l'on voit facilement qu'elle a pour limite $\frac{1}{2}\mathrm{L}\,2$ lorsque n augmente indéfiniment. Il en est d'ailleurs de même des groupes où figurent les nombres impairs. La série obtenue appartient donc à cette classe particulière de séries divergentes dans lesquelles la somme des p premiers termes reste finie, mais n'a pas de limite déterminée lorsque p augmente indéfiniment suivant une loi quelconque.

Sur les fonctions de deux variables réelles [1].

Je me propose d'étendre aux fonctions de deux variables réelles un théorème que j'ai démontré dans ma Thèse, au sujet des fonctions d'une seule variable réelle ; j'ai indiqué cette extension dans une Note présentée à l'Académie des Sciences, le 2 décembre 1895.

Désignons par $f(x, y)$ une fonction des deux variables *réelles*

[1] *Annales de l'École Normale supérieure*, 1896.

x et y, admettant des dérivées partielles de tous les ordres à l'intérieur et sur le périmètre du carré défini par les inégalités

$$(1) \qquad -1 \leq x \leq 1, \qquad -1 \leq y \leq 1.$$

Nous nous proposons de trouver pour cette fonction un développement en série, tel que l'on obtienne toutes les dérivées partielles de la fonction par la dérivation terme à terme de la série. La méthode, qui nous conduira à ce résultat, ne diffère pas essentiellement de celle que j'ai employée, dans ma Thèse, pour résoudre le même problème, dans le cas des fonctions d'une seule variable; mais il sera nécessaire d'en reprendre complètement l'exposition, afin de préciser davantage l'ordre de grandeur des coefficients des séries et d'obtenir ainsi certaines inégalités, qui étaient inutiles dans le cas d'une seule variable, et qui deviennent, au contraire, indispensables pour l'extension à deux variables.

Nous allons chercher d'abord à déterminer une série

$$(2) \qquad \varphi(x, y) = \Sigma \varphi_n(y) x^n,$$

convergente ainsi que toutes ses dérivées partielles pour toutes les valeurs de x et y appartenant au domaine considéré [défini par les inégalités (1)], et telle que la différence

$$f(x, y) - \varphi(x, y),$$

ainsi que chacune de ses dérivées par rapport à x, se réduise à la même fonction de y pour $x = +1$ et pour $x = -1$ [1]. Les fonctions $\varphi_n(y)$ et leurs dérivées satisferont, de plus, à des inégalités très importantes.

Posons

$$(3) \qquad \varphi(x, y) = \psi_1(x^2, y) + x\psi_2(x^2, y);$$

nous devons avoir, par hypothèse, quel que soit l'ordre de dérivation α,

$$D_x^\alpha[f(x, y) - \varphi(x, y)]_{x=1} = D_x^\alpha[f(x, y) - \varphi(x, y)]_{x=-1}.$$

---

[1] La fonction $f(x, y)$, pouvant n'être pas définie pour les valeurs de x et de y ne satisfaisant pas aux inégalités (1), ses dérivées pour les points du périmètre du carré peuvent n'être définies que suivant les directions *non extérieures* au carré.

Ces équations seront évidemment vérifiées si les dérivées partielles par rapport à z des fonctions $\psi_1(z, y)$ et $\psi_2(z, y)$ se réduisent pour $z = 1$ à des fonctions de y, aisées à calculer de proche en proche et d'ailleurs déterminées en partie seulement; nous pouvons donc les remplacer d'une infinité de manières par les deux systèmes

$$D_z^\alpha[\psi_1(z, y)]_{z=1} = f_\alpha^1(y),$$
$$D_z^\alpha[\psi_2(z, y)]_{z=1} = f_\alpha^2(y),$$

dans lesquels les fonctions $f_\alpha^1(y)$, $f_\alpha^2(y)$ sont des combinaisons linéaires des dérivées partielles par rapport à x de $f(x, y)$ (pour $x = \pm 1$); chacune d'elles est, en vertu des hypothèses faites sur $f(x, y)$, finie, ainsi que chacune de ses dérivées lorsque y est compris entre -1 et $+1$. Nous considérerons un seul de nos deux systèmes, que nous écrirons

$$(4) \qquad D_z^\alpha[\psi(z, y)]_{z=1} = f_\alpha(y);$$

nous poserons

$$\psi(z, y) = \psi_0(y) + \psi_1(y)z + \psi_2(y)z^2 + \ldots$$

et les équations (4) prendront la forme plus explicite

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{rrrl} \psi_0(y) + \psi_1(y) + & \psi_2(y) + & \psi_3(y) + \ldots & = f_0(y), \\ \psi_1(y) + & 2\,\psi_2(y) + & 3\,\psi_3(y) + \ldots & = f_1(y), \\ & 1.2\,\psi_2(y) + & 2.3\,\psi_3(y) + \ldots & = f_2(y), \\ & & 1.2.3\,\psi_3(y) + \ldots & = f_3(y), \\ & & \ldots\ldots\ldots\ldots & \end{array} \right.$$

C'est de la résolution de ce système (5) que nous allons tout d'abord nous occuper; nous le résoudrons d'abord avec une certaine approximation et obtiendrons ensuite une solution exacte. D'ailleurs, on verra qu'il y a un grand arbitraire dans la méthode que nous emploierons et que, par suite, la solution obtenue sera loin d'être unique; mais il nous suffira qu'elle existe.

Soit $f_\alpha^{(\beta)}(y)$ la dérivée d'ordre β par rapport à y de $f_\alpha(y)$; lorsque y varie entre -1 et $+1$, la valeur absolue de $f_\alpha^{(\beta)}(y)$ est inférieure à un nombre fixe $M_\alpha^{(\beta)}$; formons le Tableau à double

entrée :

$$\begin{matrix} M_0^0, & M_1^0, & M_2^0, & \ldots, & M_\alpha^0, & \ldots \\ M_0^1, & M_1^1, & M_2^1, & \ldots, & M_\alpha^1, & \ldots, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \\ M_0^{(\beta)}, & M_1^{(\beta)}, & M_2^{(\beta)}, & \ldots, & M_\alpha^{(\beta)}, & \ldots, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix}$$

Il résulte de recherches de Paul du Bois-Reymond (*voir* notamment *Math. Annalen*, t. XI) que l'on peut trouver une suite

$$A_0, \quad A_1, \quad A_2, \quad \ldots, \quad A_\alpha, \quad \ldots$$

de nombres positifs indéfiniment croissants, tels que, β étant un nombre fixe quelconque, on ait

$$(6) \qquad \lim_{\alpha = \infty} \frac{M_\alpha^{(\beta)}}{A_\alpha} = 0.$$

Nous désignerons par

$$(7) \qquad u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$$

une série *divergente* à termes positifs décroissants, telle que la série

$$u = u_0 + u_1 + \frac{u_2}{2} + \ldots + \frac{u_n}{n} + \ldots$$

soit convergente ; on peut, par exemple, pour fixer les idées, supposer $u_0 = 1$, $u_n = \frac{1}{n}$.

Cela posé, prenons dans la série (7) un nombre de termes suffisant pour avoir une somme supérieure ou égale à A_0 ; comme nous pouvons augmenter les A sans que la condition (6) cesse d'être vérifiée, nous pourrons supposer que l'on a

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_{r_0} = A_0.$$

Cela étant, définissons les fonctions χ par les égalités

$$\chi_0(y) = u_0 \frac{f_0(y)}{A_0},$$

$$\chi_1(y) = u_1 \frac{f_0(y)}{A_0},$$

$$\chi_2(y) = u_2 \frac{f_0(y)}{A_0},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\chi_{r_0}(y) = u_{r_0} \frac{f_0(y)}{A_0};$$

nous aurons manifestement

$$\chi_0(y) + \chi_1(y) + \ldots + \chi_{r_0}(y) = f_0(y).$$

Les fonctions χ seront regardées par nous comme la première approximation des fonctions ψ de même indice ; en remplaçant les ψ par les χ, jusqu'à l'indice r_0 inclusivement, la seconde des équations du système (5) deviendra

$$(r_0 + 1)\psi_{r_0+1}(y) + (r_0 + 2)\psi_{r_0+2}(y) + \ldots = g_1(y),$$

en posant

$$g_1(y) = f_1(y) - [\chi_1(y) + 2\chi_2(y) + \ldots + r_0\chi_{r_0}(y)].$$

Nous désignerons par

$$N_1^{(0)}, \quad N_1^{(1)}, \quad \ldots, \quad N_1^{(\beta)}, \quad \ldots$$

les limites supérieures respectives des valeurs absolues de

$$g_1(y), \quad g_1'(y), \quad \ldots, \quad g_1^{(\beta)}(y), \quad \ldots,$$

lorsque y est compris entre -1 et $+1$; on a évidemment

$$N_1^{(\beta)} < M_1^{(\beta)} + r_0 M_0^{(\beta)},$$

nous poserons

$$B_1 = A_1 + 2 r_0 A_0,$$

et nous aurons

$$\frac{N_1^{(\beta)}}{B_1} < \frac{M_1^{(\beta)}}{A_1} + \frac{1}{2}\frac{M_0^{(\beta)}}{A_0}.$$

Ayant ainsi défini le nombre B_1, nous pourrons, en l'augmentant s'il est nécessaire, prendre dans la série divergente (7) un certain nombre de termes, *à la suite de ceux qui ont déjà été pris*, tels que l'on ait

$$u_{r_0+1} + u_{r_0+2} + \ldots + u_{r_1} = B_1 ;$$

et nous définirons les fonctions χ, d'indice compris entre r_0 et r_1, par les égalités

$$(r_0 + 1)\chi_{r_0+1}(y) = u_{r_0+1}\frac{g_1(y)}{B_1},$$

$$(r_0 + 2)\chi_{r_0+2}(y) = u_{r_0+2}\frac{g_1(y)}{B_1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$r_1 \quad \chi_{r_1}(y) \quad = u_{r_1} \quad \frac{g_1(y)}{B_1},$$

de telle manière que l'on a

$$\chi_1(y) + 2\chi_2(y) + \ldots + r_1\chi_{r_1}(y) = f_1(y).$$

En remplaçant les ψ par les χ jusqu'à l'indice r_1, la troisième des équations (5) devient

$$r_1(r_1+1)\psi_{r_1+1}(y) + (r_1+1)(r_1+2)\psi_{r_1+2}(y) + \ldots = g_2(y);$$

en posant

$$g_2(y) = f_2(y) - [1.2\,\chi_2(y) + 2.3\,\chi_3(y) + \ldots + (r_1-1)r_1\,\chi_{r_1}(y)].$$

Si nous désignons par $N_2^{(\beta)}$ le module maximum de $g_2(y)$, on a

$$N_2^{(\beta)} < M_2^{(\beta)} + r_1 N_1^{(\beta)} + r_0^2 M_0^{(\beta)};$$

et en posant

$$B_2 = A_2 + 2^2 r_1 B_1 + 2^3 r_0^2 A_0,$$

on a

$$\frac{N_2^{(\beta)}}{B_2} < \frac{M_2^{(\beta)}}{A_2} + \frac{1}{2^2}\frac{N_1^{(\beta)}}{B_1} + \frac{1}{2^3}\frac{M_0^{(\beta)}}{A_0}$$
$$< \frac{M_2^{(\beta)}}{A_2} + \frac{1}{2^2}\left(\frac{M_1^{(\beta)}}{A_1} + \frac{M_0^{(\beta)}}{A_0}\right).$$

Nous aurons, en continuant de même,

$$N_3^{(\beta)} < M_3^{(\beta)} + r_2 N_2^{(\beta)} + r_1^2 N_1^{(\beta)} + r_0^3 M_0^{(\beta)},$$

et nous poserons

$$B_3 = A_3 + 2^3 r_2 B_2 + 2^4 r_1^2 B_1 + 2^5 r_0^3 A_0,$$

de sorte que l'on aura

$$\frac{N_3^{(\beta)}}{B_3} < \frac{M_3^{(\beta)}}{A_3} + \frac{1}{2^3}\left[\frac{M_2^{(\beta)}}{A_2} + \frac{1}{2^2}\left(\frac{M_1^{(\beta)}}{A_1} + \frac{M_0^{(\beta)}}{A_0}\right)\right]$$
$$+ \frac{1}{2^4}\left(\frac{M_1^{(\beta)}}{A_1} + \frac{1}{2}\frac{M_0^{(\beta)}}{A_0}\right) + \frac{1}{2^5}\frac{M_0^{(\beta)}}{A_0}$$

ou bien

$$\frac{N_3^{(\beta)}}{B_3} < \frac{M_3^{(\beta)}}{A_3} + \frac{1}{2^3}\left(\frac{M_2^{(\beta)}}{A_2} + \frac{M_1^{(\beta)}}{A_1} + \frac{M_0^{(\beta)}}{A_0}\right).$$

D'une manière générale, on pourra choisir les B, de sorte que l'on ait

$$\frac{N_\alpha^{(\beta)}}{B_\alpha} < \frac{M_\alpha^{(\beta)}}{A_\alpha} + \frac{1}{2^\alpha}\left(\frac{M_{\alpha-1}^{(\beta)}}{A_{\alpha-1}} + \frac{M_{\alpha-2}^{(\beta)}}{A_{\alpha-2}} + \ldots + \frac{M_0^{(\beta)}}{A_0}\right),$$

et l'on en conclut aisément, d'après (6), que, quel que soit le nombre fixe β, on a

$$\lim_{\alpha=\infty} \frac{N_\alpha^\beta}{B_\alpha} = 0. \tag{8}$$

D'ailleurs, les nombres r_i étant définis par les relations

$$u_{r_{i-1}+1} + u_{r_{i-1}+2} + \ldots + u_{r_i} = B_i,$$

on a, α étant compris entre r_{i-1} et r_i,

$$\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-i+1)\chi_\alpha(y) = u_\alpha \frac{g_i(y)}{B_i}; \tag{9}$$

la fonction $g_i(y)$ étant définie par l'égalité

$$g_i(y) = f_i(y) - \sum_{j=i}^{j=r_{i-1}} \frac{j!}{(j-i)!}\chi_j(y),$$

de sorte que, d'après (9),

$$\sum_{\alpha=i}^{\alpha=r_i} \frac{\alpha!}{(\alpha-i)!}\chi_\alpha(y) = f_i(y); \tag{10}$$

d'ailleurs N_α^β désigne le maximum de la valeur absolue de $g_\alpha^\beta(y)$. On conclut de l'égalité (9) que l'on a

$$\left|\chi_\alpha^\beta(y)\right| < \frac{u_\alpha}{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-i+1)} \frac{N_i^\beta}{B_i} \qquad (r_{i-1} < \alpha \leq r_i).$$

D'après la condition (8) on peut trouver un nombre C_β supérieur à chacune des expressions

$$\frac{\alpha^i}{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-i+1)} \frac{N_i^\beta}{B_i},$$

car lorsque α et i augmentent indéfiniment, β étant fixe, cette expression tend vers zéro (1). On en conclut que l'on a

$$\left|\chi_\alpha^\beta(y)\right| < \frac{C_\beta u_\alpha}{\alpha^i} \qquad (r_{i-1} < \alpha \leq r_i)$$

---

(1) Comme on peut augmenter les B, on a pu toujours s'arranger pour que r_i croisse très rapidement lorsque i croît : par exemple, $r_i > e^i$; on a $r_{i-1} < \alpha < r_i$, et l'on en conclut $\lim_{i=\infty} \frac{\alpha^i}{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-i+1)} = 1$.

quel que soit y dans l'intervalle -1, $+1$. D'ailleurs, en désignant par p un nombre fixe, les α inférieurs à r_p sont en nombre limité ; on en conclut que l'on peut déterminer une constante $C_{\beta p}$ telle que l'on ait, quel que soit α,

$$|\chi_\alpha^{(\beta)}(y)| < \frac{C_{\beta p}}{\alpha^p} u_\alpha.$$

On en conclut que la série

$$\chi(z, y) = \sum \chi_n(y) z^n$$

est, ainsi que chacune de ses dérivées partielles, par rapport à y et z, absolument et uniformément convergente sous les conditions

$$-1 < y < 1, \qquad |z| < 1;$$

y est nécessairement réel ; z pourrait être imaginaire.

Nous poserons

$$\psi(z, y) = \chi(z, y) + \theta(z, y),$$

et nous allons chercher les dérivées partielles de θ par rapport à z pour $z = 1$; posons

$$\begin{aligned} \theta(1, y) &= \theta_0(y), \\ D_z[\theta(z, y)]_{z=1} &= \theta_1(y), \\ D_z^2[\theta(z, y)]_{z=1} &= \theta_2(y), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Nous avons, par hypothèse,

$$D_z^i[\psi(z, y)]_{z=1} = f_i(y).$$

D'autre part, d'après l'équation (10), on a

$$D_z^i[\chi(z, y)]_{z=1} = f_i(y) - \sum_{\alpha = r_i + 1}^{\alpha = \infty} \frac{\alpha!}{(\alpha - i)!} \chi_\alpha(y),$$

on en conclut

$$\theta_i(y) = - \sum_{\alpha = r_i + 1}^{\alpha = \infty} \frac{\alpha!}{(\alpha - i)!} \chi_\alpha(y).$$

Or, α étant supérieur à r_i, nous avons

$$|\chi_\alpha^{(\beta)}(y)| < \frac{C_\beta u_\alpha}{\alpha^{i+1}}$$

et, par suite,

$$\left| \theta_i^\beta(y) \right| < C\beta \sum_{r_1+1}^{\infty} \frac{u_\alpha}{\alpha} < C_\beta u.$$

Posons maintenant

$$\theta(z, y) = \sum_0^{\infty} \frac{\theta_i(y)}{i!} (z-1)^i.$$

Il résulte des inégalités précédentes que cette fonction est une fonction de z holomorphe dans tout le plan, ainsi que chacune de ses dérivées par rapport à y; d'ailleurs, ses dérivées par rapport à z, pour $z = 1$, sont précisément les fonctions $\theta_i(y)$. Ordonnons cette fonction suivant les puissances de z:

$$\theta(z, y) = \eta_0(y) + \eta_1(y) z + \eta_2(y) z^2 + \ldots.$$

Il est manifeste que la valeur absolue de $\eta_\alpha^{(\beta)}(y)$ est inférieure au coefficient de z^α dans le développement, suivant les puissances de z, de la fonction

$$\sum_0^{\infty} \frac{C_\beta u}{i!} (z+1)^i = C_\beta u\, e^{z+1},$$

c'est-à-dire à $\frac{C_\beta u e}{\alpha!}$. On en conclut que, en posant

$$\psi_\alpha(y) = \chi_\alpha(y) + \eta_\alpha(y),$$

on peut déterminer des constantes $D_{\beta p}$ telles que l'on ait, quel que soit α,

$$\left| \psi_\alpha^\beta(y) \right| \frac{D_{\beta p}}{\alpha^p}.$$

On a d'ailleurs

$$\psi(z, y) = \chi(z, y) + \theta(z, y) = \sum_0^{\infty} \psi_\alpha(y) z^\alpha,$$

et les fonctions ψ_α satisfont aux équations (5), qui sont ainsi complètement résolues.

Nous avions posé

$$\varphi(x, y) = \psi_1(x^2, y) + x\, \psi_2(x^2, y).$$

On en conclut aisément que, si l'on a

$$\varphi(x, y) = \Sigma\, \varphi_\alpha(y) x^n,$$

il existe des constantes $H_{\beta p}$ vérifiant les inégalités

$$(11)\qquad \left|\varphi_\alpha^\beta(y)\right| < \frac{H_{\beta p}}{\alpha^p},$$

car des constantes analogues existent pour les fonctions $\psi_1(z, y)$ et $\psi_2(z, y)$ et la difficulté résultant de ce que les exposants de x ne sont pas les mêmes que les exposants de z se lève aisément grâce à l'arbitraire de p.

Ces inégalités (11) sont pour nous fondamentales; rappelons que la fonction $\varphi(x, y)$ satisfait aux relations

$$D_x^\alpha[f(x, y) - \varphi(x, y)]_{x=1} = D_x^\alpha[f(x, y) - \varphi(x, y)]_{x=-1}.$$

Posons maintenant

$$f(x, y) - \varphi(x, y) = \varpi(x, y)$$

et ensuite

$$\lambda_\alpha(y) = \int_{-1}^{+1} \varpi(x, y)\cos\pi\alpha x\, dx,$$

$$\mu_\alpha(y) = \int_{-1}^{+1} \varpi(x, y)\sin\pi\alpha x\, dx,$$

le nombre entier α prenant toutes les valeurs depuis zéro jusqu'à l'infini.

Désignons par $\varpi_{p\beta}$ la dérivée partielle de $\varpi(x, y)$ prise p fois par rapport à x et β fois par rapport à y; si l'on remarque que $\varpi_{p\beta}$ se réduit pour $x = +1$ et $x = -1$ à la même fonction de y, on obtient aisément, en intégrant par parties p fois de suite,

$$\lambda_\alpha^\beta(y) = \frac{1}{\alpha^p\pi^p}\int_{-1}^{+1} \varpi_{p\beta}(x, y)\cos\pi\left(\alpha x - \frac{p}{2}\right) dx.$$

Il résulte, d'autre part, des hypothèses et des calculs déjà faits, que l'on a

$$\left|\frac{2}{\pi^p}\varpi_{p\beta}(x, y)\right| < K_{\beta p};$$

on en conclut

$$(12)\qquad \left|\lambda_\alpha^\beta(y)\right| < \frac{K_{\beta p}}{\alpha^p},$$

et de même

$$(13)\qquad \left|\mu_\alpha^\beta(y)\right| < \frac{K_{\beta p}}{\alpha^p}.$$

D'ailleurs, on a évidemment

$$\varpi(x, y) = \frac{1}{2}\lambda_0(y) + \lambda_1(y)\cos\pi x + \mu_1(y)\sin\pi x + \ldots$$
$$+ \lambda_\alpha(y)\cos\pi\alpha x + \mu_\alpha(y)\sin\pi\alpha x + \ldots,$$

et, en réunissant $\frac{1}{2}\lambda_0(y)$ à $\varphi_0(y)$, on peut écrire

$$f(x, y) = \varphi_0(y) + \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\infty} [\lambda_\alpha(y)\cos\pi\alpha x + \mu_\alpha(y)\sin\pi\alpha x + \varphi_\alpha(y)x^\alpha],$$

les fonctions λ_α, μ_α, φ_α satisfaisant aux inégalités (11), (12), (13), grâce auxquelles on peut affirmer que la série est absolument et uniformément convergente, ainsi que chacune de ses dérivées partielles par rapport à y, sous les conditions

$$-1 \leq x \leq 1, \qquad -1 \leq y \leq 1.$$

Nous allons montrer maintenant que l'on peut développer chacune des fonctions $\varphi_\alpha(y)$ en une série de la forme

$$(14) \qquad \varphi_\alpha(y) = C_{\alpha 0} + \sum_{1}^{\infty}{}_\beta (A_{\alpha\beta}\cos\pi\beta y + B_{\alpha\beta}\sin\pi\beta y + C_{\alpha\beta}y^\beta),$$

les constantes A, B, C satisfaisant à la condition suivante : à chaque couple de nombres entiers p, q correspond un nombre m_{pq} tel que l'on ait, quels que soient α et β,

$$(15) \qquad |\alpha^p\beta^q A_{\alpha\beta}| < m_{pq}, \qquad |\alpha^p\beta^q B_{\alpha\beta}| < m_{pq}, \qquad |\alpha^p\beta^q C_{\alpha\beta}| < m_{pq}.$$

D'ailleurs, les fonctions λ_α et μ_α satisfaisant aux mêmes inégalités que les φ_α, la même démonstration prouvera que l'on peut poser

$$\lambda_\alpha(y) = C'_{\alpha 0} + \sum_{1}^{\infty}(A'_{\alpha\beta}\cos\pi\beta y + B'_{\alpha\beta}\sin\pi\beta y + C'_{\alpha\beta}y^\beta),$$

$$\mu_\alpha(y) = C''_{\alpha 0} + \sum_{1}^{\infty}{}_\beta (A''_{\alpha\beta}\cos\pi\beta y + B''_{\alpha\beta}\sin\pi\beta y + C''_{\alpha\beta}y^\beta),$$

les A', B', C', A'', B'', C'' satisfaisant aux mêmes inégalités que les A, B, C.

Il en résultera que la série double, obtenue en remplaçant les φ_α, λ_α, μ_α par leurs développements dans l'expression de $f(x, y)$,

sera absolument et uniformément convergente, ainsi que chacune de ses dérivées partielles par rapport à x et y.

Tout revient à démontrer la possibilité des développements (14), satisfaisant aux conditions (15), en se servant des inégalités (11), que nous récrivons

$$(11) \qquad |\varphi_\alpha^\beta(y)| < \frac{H_{\beta.p}}{\alpha^p}.$$

Nous poserons

$$\varphi_\alpha(y) = \psi_\alpha(y^2) + y\,\chi_\alpha(y^2) + \varpi_\alpha(y);$$

et, supposant que $\varpi_\alpha(y)$ a des dérivées égales pour $y = +1$ et $y = -1$, nous déterminerons les valeurs des dérivées des fonctions $\psi_\alpha(z)$ et $\chi_\alpha(z)$ pour $z = 1$; nous aurons évidemment

$$|\psi_\alpha^\beta(1)| < \frac{M_{\beta.p}}{\alpha^p},$$

les constantes M se déduisant par des relations simples des constantes H.

Quelles que soient ces constantes M, nous pourrons trouver une suite

$$A_0, \quad A_1, \quad A_2, \quad \ldots, \quad A_\beta, \quad \ldots$$

de nombres croissants, tels que l'on ait, quel que soit le nombre fixe p

$$\lim_{\beta=\infty} \frac{M_{\beta.p}}{A_\beta} = 0.$$

Ce point étant acquis, posons

$$\psi_\alpha^\beta(1) = f_{\alpha\beta}$$

et

$$\psi_\alpha(z) = a_{\alpha 0} + a_{\alpha 1} z + a_{\alpha 2} z^2 + \ldots + a_{\alpha\beta} z^\beta + \ldots;$$

nous devrons avoir

$$\begin{aligned} a_{\alpha 0} + a_{\alpha 1} + \quad a_{\alpha 2} + \quad a_{\alpha 3} + \ldots &= f_{\alpha 0}, \\ a_{\alpha 1} + \quad 2a_{\alpha 2} + \quad 3a_{\alpha 3} + \ldots &= f_{\alpha 1}, \\ 1.2a_{\alpha 2} + 2.3a_{\alpha 3} + \ldots &= f_{\alpha 2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots& \end{aligned}$$

Prenons la série divergente des u, dont il a été déjà fait usage, et soit

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{i_0} = A_0.$$

Nous prendrons, β étant inférieur ou égal à r_0,

$$a_{\alpha\beta} = u_\beta \frac{f_{\alpha 0}}{A_0};$$

nous poserons ensuite

$$g_{\alpha 1} = f_{\alpha 1} - (a_{\alpha 1} + 2 a_{\alpha 2} + \ldots + r_0 a_{\alpha r_0}),$$

et nous aurons

$$|g_{\alpha 1}| < \frac{1}{\alpha^p}(M_{1p} + r_0 M_{0p});$$

nous prendrons

$$B_1 = A_1 + 2 r_0 A_0,$$

et nous procéderons de la même manière que plus haut (pages 5-6); nous aurons, β étant compris entre r_{q-1} et r_q,

$$a_{\alpha\beta} = \frac{u_\beta}{\beta(\beta-1)\ldots(\beta-q+1)} \frac{g_{\alpha q}}{B_q}$$

et

$$\frac{|g_{\alpha q}|}{B_q} < \frac{1}{\alpha^p}\left[\frac{M_{qp}}{A_q} + \frac{1}{2^q}\left(\frac{M_{q-1,p}}{A_{q-1}} + \frac{M_{q-2,p}}{A_{q-2}} + \ldots + \frac{M_{0,p}}{A_0}\right)\right].$$

Or $\dfrac{M_{qp}}{A_q}$ tend vers zéro lorsque q augmente indéfiniment, quelle que soit la valeur fixe de p; on en conclut que l'on a

$$\frac{|g_{\alpha q}|}{B_q} < \frac{N_p}{\alpha_p},$$

N_p étant une constante qui ne dépend que de p.

D'ailleurs r_q est une fonction croissante de q, *qui ne dépend pas de* α, puisque les r_q sont définis uniquement à l'aide des constantes A_β et de la série u.

On en conclut que, sous la seule condition $\beta > r_{q-1}$, on a

$$\alpha^p \beta^q a_{\alpha\beta} < u_\beta \frac{\beta^q}{\beta(\beta-1)\ldots(\beta-q+1)} N_p < R_p u_\beta < R_p u,$$

R_p étant une constante. D'ailleurs les valeurs de β, inférieures à r_q, sont en nombre limité (car r_q ne dépend pas de α) et, pour chacune d'elles, on a

$$a_{\alpha\beta} < u_\beta \frac{N_p}{\alpha^p}$$

et, par suite,

$$\alpha^p \beta^q a_{\alpha\beta} < u_p N_p \beta^q < u_p N_p r_q^q.$$

En prenant $R_{p,q}$ égal au plus grand des nombres R_p et $uN_p r_q^q$, on a

$$|\alpha^p \beta^q a_{\alpha\beta}| < R_{p,q}.$$

Les constantes $a_{\alpha\beta}$ ainsi calculees nous définissent des fonctions

$$\varphi_\alpha(z) = \Sigma a_{\alpha\beta} z^\beta;$$

nous poserons

$$\psi_\alpha(z) = \varphi_\alpha(z) + \theta_\alpha(z);$$

et nous allons chercher les valeurs des dérivées successives de $\theta_\alpha(z)$ pour $z = 1$; on a

$$\varphi_\alpha^{(\beta)}(1) = \sum_\beta^\infty \frac{i!}{(i-\beta)!} a_{\alpha i}.$$

D'autre part, d'après la manière dont on a calculé les a, on a

$$\sum_{i=\beta}^{i=r_\beta} \frac{i!}{(i-\beta)!} a_{\alpha i} = f_{\alpha\beta} = \psi_\alpha^{(\beta)}(1).$$

On en conclut

$$\theta_\alpha^{(\beta)}(1) = -\sum_{r_\beta+1}^\infty \frac{i!}{(i-\beta)!} a_{\alpha i}.$$

Or, i étant supérieur à r_β, on a

$$\alpha^p i^{\beta+1} a_{\alpha i} < R_p u_i$$

et, par suite,

$$|\theta_\alpha^{(\beta)}(1)| < \frac{R_p}{\alpha^p} \sum_{r_\beta+1}^\infty \frac{u_i}{i} < \frac{R_p u}{\alpha^p}.$$

Donc si l'on développe, suivant les puissances de z, l'expression

$$\theta_\alpha(z) = \sum_0^\infty \frac{\theta_\alpha^{(\beta)}(1)}{\beta!} (z-1)^\beta,$$

on verra, comme plus haut (page 81), que le coefficient $b_{\alpha\beta}$ de z^β est inférieur à $\frac{R_p u.e}{\alpha^p \beta!}$, et, par suite, quel que soit le nombre fixe q, on pourra déterminer R_{pq} de manière qu'il soit inférieur à $\frac{R_{pq}}{\alpha^p \beta^q}$, puisque les valeurs de β telles que $\beta! < \beta^q$ sont en nombre limité. En posant

$$\psi_\alpha(z) = \varphi_\alpha(z) + \theta_\alpha(z) = \sum_0^\infty (a_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta}) z^\beta.$$

les coefficients de $\psi_\alpha(z)$ vérifieront des inégalités analogues ; on procédera de même pour les fonctions χ_α, et, en prenant

$$\varphi_\alpha(y) - \varpi_\alpha(y) = \psi_\alpha(y^2) + y\,\chi_\alpha(y^2) = \sum_0^\infty{}_\beta\, C_{\alpha\beta}\, y^\beta,$$

les constantes $C_{\alpha\beta}$ satisferont bien aux inégalités (15).

Les fonctions

$$\varpi_\alpha(y) = \varphi_\alpha(y) - \sum_0^\infty{}_\beta\, C_{\alpha\beta}\, y^\beta$$

ont des dérivées égales pour $y = +1$ et $y = -1$; je dis de plus qu'elles satisfont à des inégalités analogues aux inégalités (11) ; cela est manifeste, car il en est ainsi des fonctions $\varphi_\alpha(y)$ et de plus des fonctions

$$\mu_\alpha(y) = \sum_1^\infty{}_\beta\, C_{\alpha\beta}\, y^\beta,$$

grâce aux inégalités que vérifient les $C_{\alpha\beta}$.

On a donc

$$\left|2\varpi_\alpha^{(\beta)}(y)\right| < \frac{K_{\beta p}}{\alpha^p}.$$

Dès lors, si l'on pose

$$\varpi_\alpha(y) = \Sigma\, A_{\alpha\beta}\cos\pi\beta y + B_{\alpha\beta}\sin\pi\beta y,$$

on a, par exemple,

$$\begin{aligned} A_{\alpha\beta} &= \int_{-1}^{+1} \varpi_\alpha(y)\cos\pi\beta y\, dy \\ &= \int_{-1}^{+1} \frac{\varpi_\alpha^{(q)}(y)}{\beta^q}\cos\pi\left(\beta y - \frac{q}{2}\right) dy < \frac{K_{qp}}{\alpha^p \beta^q}. \end{aligned}$$

Notre démonstration est donc complète et nous pouvons affirmer que *toute fonction des deux variables x et y ayant des dérivées partielles de tous les ordres sous les conditions*

$$-1 \leqq x \leqq +1, \qquad -1 \leqq y \leqq +1$$

peut être mise sous la forme

$$\begin{aligned} f(x, y) = \sum_\alpha \sum_\beta & (A_{\alpha\beta}\cos\pi\beta y + B_{\alpha\beta}\sin\pi\beta y + C_{\alpha\beta}\, y^\beta)\, x^\alpha \\ & + (A'_{\alpha\beta}\cos\pi\beta y + B'_{\alpha\beta}\sin\pi\beta y + C'_{\alpha\beta}\, y^\beta)\cos\pi\alpha x \\ & + (A''_{\alpha\beta}\cos\pi\beta y + B''_{\alpha\beta}\sin\pi\beta y + C''_{\alpha\beta}\, y^\beta)\sin\pi\alpha x. \end{aligned}$$

les constantes $A_{\alpha\beta}$, ..., $C_{\alpha\beta}$ *étant telles que l'on ait, pour toutes les valeurs de p et de q,*

$$|\alpha^p \beta^q A_{\alpha\beta}| < m_{pq}, \quad \ldots, \quad |\alpha^p \beta^q C_{\alpha\beta}| < m_{pq},$$

les nombres m_{pq} *ne dépendant pas de* α *ni de* β.

Il semble que l'extension, par nos méthodes, de ce théorème aux fonctions de plus de deux variables réelles, ne présenterait d'autre difficulté que des longueurs de rédaction ; il serait désirable, et nous le souhaitons vivement, qu'un analyste plus habile que nous trouve une démonstration rendant intuitives ces propositions si simples dans leur énoncé.

Sur l'intégration des fonctions non bornées et sur les définitions constructives (¹).

I. — L'intégration des fonctions non bornées.

Nous allons développer la définition et la démonstration de l'intégrale des fonctions non bornées, reprenant un exemple donné dans ma Note *Sur une condition générale d'intégrabilité* (²).

Soient a_n les nombres rationnels compris entre 0 et 1 rangés en série simple d'après l'un des procédés connus ; on pose

$$f(x) = \Sigma e^{-n} |x - a_n|^{-\frac{1}{2}}. \tag{1}$$

Cette égalité définit la fonction $f(x)$ lorsque la série converge ; lorsqu'elle diverge ou qu'un des termes est infini, la fonction $f(x)$ est infinie. L'ensemble des infinis de $f(x)$ a la puissance du continu (³). Pour montrer que la fonction $f(x)$ est intégrable par ma méthode, « *la seule précaution à prendre est la suivante : il ne suffit pas que l'ensemble des intervalles d'exclusion tende vers zéro lorsqu'on fait varier l'ensemble de ces intervalles ; il faut encore avoir soin, dans chaque choix particulier que l'on fait de ces intervalles, d'assujettir leur décroissance asympto-*

(¹) *Annales de l'École Normale*, 1920.

(²) *Comptes rendus*, t. 150, p. 508, et *Leçons sur la théorie des fonctions*, Note VI.

(³) *Voir*, par exemple, ma Note *Sur les ensembles de mesure nulle* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, 1913 (plus haut, p. 20).

tique à ne pas être trop rapide [1] ». Sans cette précaution, en effet, il pourrait se trouver dans les parties non exclues des points de divergence de la série, c'est-à-dire des infinis de $f(x)$; la définition serait donc inexistante.

Nous allons prendre, comme il est indiqué dans la Note citée, l'intervalle d'exclusion relatif à a_n égal à $\frac{\varepsilon}{n^2}$. A chaque valeur de ε faisons correspondre un nombre m tel que l'on ait

$$(2)\qquad \sum_{m+1}^{\infty} e^{-n} n^2 < \varepsilon^2,$$

$$(3)\qquad \sum_{m+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \varepsilon^2.$$

Posons

$$(4)\qquad f(x) = \varphi_m(x) + \psi_m(x)$$

en désignant par φ_m la somme des m premiers termes de la série et par ψ_m le reste. Nous devons, en laissant ε fixe, former les sommes de Riemann relatives à $f(x)$, en tenant compte de l'exclusion des intervalles $\frac{\varepsilon}{n^2}$; ces sommes peuvent être décomposées en deux parties, l'une relative à φ_m et l'autre relative à ψ_m. La partie relative à ψ_m est infiniment petite avec ε, d'après l'inégalité (2); quant à la partie relative à φ_m, elle converge lorsque les intervalles de Riemann tendent vers zéro, à condition de faire abstraction des intervalles d'exclusion relatifs aux points singuliers de ψ_m; mais, d'après l'inégalité (3), la modification introduite du fait de ces intervalles est également infiniment petite avec ε. On est donc conduit à attribuer à l'intégrale une valeur égale à la somme (convergente) des intégrales des termes de la série.

La démonstration s'appliquerait sans modification appréciable à une fonction telle que

$$(5)\qquad F(x) = \Sigma\, e^{-n}\theta(x - a_n)$$

avec

$$(6)\qquad \theta(x) = \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x},$$

(1) Note citée.

dont la valeur absolue n'est pas intégrable. Il y aurait lieu simplement ici de remarquer, ce qui était inutile dans le cas précédent, que l'on peut, quel que soit m, choisir d'une manière aussi irrégulière qu'on le désire les intervalles d'exclusion relatifs aux m premiers points singuliers, la décroissance asymptotique seule restant assujettie à des restrictions analogues aux précédentes. Cette remarque revient à constater, par le calcul des sommes de Riemann, l'intégrabilité au sens de Riemann de chaque terme de la série, considéré isolément.

C'est pour résoudre des questions précises se rattachant à mes recherches sur les fonctions monogènes non analytiques, que j'avais été amené à réfléchir à l'intégration des fonctions non bornées et j'ai été constamment guidé par la pensée de cette application; mais, je suis arrivé, entre temps, à exposer les résultats essentiels de la théorie des fonctions monogènes non analytiques en évitant, au moins formellement, l'emploi de fonctions non bornées [1]; j'y utilise, par contre, des chemins d'intégration d'une nature discontinue très particulière. Par l'emploi de tels chemins dans le plan complexe, on démontrerait aisément qu'une fonction telle que $F(x)$ est la dérivée de son intégrale définie et que la valeur que j'attribue à son intégrale peut s'exprimer au moyen de la fonction primitive. L'intégration terme à terme d'une telle fonction me paraît exiger des procédés de raisonnement, sinon identiques, du moins équivalents à ceux que j'ai employés [2]. Je n'aperçois d'ailleurs pas d'applications simples d'un tel résultat; c'est pourquoi je n'ai pas, jusqu'ici, développé la démonstration de l'existence de l'intégrale, d'après ma définition, pour une fonction telle que (5); car un tel résultat, si l'on

(1) *Voir* la Note I de mes *Leçons sur les fonctions monogènes uniformes d'une variable complexe*. Cette Note renferme une partie des résultats annoncés en 1912 comme devant paraître dans un Mémoire des *Acta mathematica*, Mémoire qui n'a pas été rédigé.

(2) Si l'on remplace un intervalle d'exclusion par le demi-cercle situé au-dessus de Ox, décrit sur cet intervalle comme diamètre, la valeur de l'intégrale dans le plan complexe est modifiée de πe^{-n}, e^{-n} étant le résidu relatif à cet intervalle. On peut ainsi démontrer que la fonction (5) est la dérivée de son intégrale indéfinie, car cette propriété est évidente si on limite la série à un nombre fini de termes et les demi-cercles, correspondant aux termes négligés, introduisent une erreur inférieure à $\pi\varepsilon$, ε étant arbitrairement petit.

n'en donne pas d'applications, n'a pas à mes yeux grand intérêt.

La définition que j'ai donnée peut paraître arbitraire; elle s'impose par la nature du problème : une fonction ne peut être intégrable que si l'ensemble de ses infinis est de mesure nulle; car, le produit de l'infini par zéro étant indéterminé, on peut espérer que ce produit a une valeur finie, tandis que le produit de l'infini par un nombre fini ne peut être qu'infini; or, tout ensemble de mesure nulle fait partie d'un ensemble régulier (¹), défini par une infinité dénombrable de points fondamentaux et des intervalles d'exclusion qui décroissent suivant une certaine loi asymptotique. Si l'on se place au point de vue d'une fonction donnée *a priori*, abstraitement, et non d'une manière constructive, on peut se demander si les points fondamentaux sont bien déterminés, c'est-à-dire si un choix particulier de points fondamentaux se distingue des autres choix possibles par des propriétés objectives, comme c'est le cas pour les fonctions que je considère. C'est là une question dont l'intérêt est peut-être grand pour les mathématiciens qui croient à l'intérêt de l'étude des fonctions considérées comme données arbitrairement sans être *effectivement données*, mais dont je n'aperçois en ce moment aucune application pratique possible (²).

II. — Sur les définitions constructives.

Depuis tantôt vingt-cinq ans, mes idées sur les définitions constructives et les questions connexes ont subi une évolution que je n'ai pas dissimulée : j'ai cru devoir, au contraire, y attirer l'attention dans la mesure où il m'a semblé qu'elle pouvait présenter quelque intérêt scientifique (³). Depuis une dizaine d'années, ma doctrine est restée stable; je vais essayer de l'exposer le plus clai-

---

(¹) *Bulletin de la Société mathématique*, 1913 (plus haut, p. 20).

(²) Dans le cas de certains ensembles de mesure nulle à définition asymptotique, le choix des points fondamentaux est arbitraire dans de très larges conditions; c'est là un point que j'étudie dans un Mémoire sur les ensembles de mesure nulle qui est en cours d'impression dans le *Bulletin de la Société mathématique* (plus haut, p. 38).

(³) *Voir* notamment ma *Notice* de 1912, p. 14, et la *Préface* de la deuxième édition de mes *Leçons sur la théorie des fonctions* (1914).

rement possible ; la principale difficulté que j'y rencontre est que certains points me paraissent tellement évidents que je me fais scrupule d'y insister; malheureusement, l'évidence est parfois subjective.

C'est un fait d'expérience que l'infini énumérable est le seul infini sur lequel tous les mathématiciens sont pratiquement toujours d'accord (j'entends lorsqu'ils font des mathématiques). Certaines suites énumérables particulières peuvent être *données* soit avec une précision absolue (suite des carrés des nombres entiers, suite des nombres premiers), soit avec une approximation indéfinie (a_n peut être calculé à ε près, quels que soient n et ε). On peut, d'autre part, considérer des *classes* de suites énumérables, telles que l'ensemble des fractions continues, ou l'ensemble des séries de Taylor de rayon de convergence donné, et faire sur ces classes des raisonnements mathématiques. Ces raisonnements sont, ou bien des raisonnements généraux, tenant lieu de raisonnements particuliers sur chaque individu de la classe qui pourra être ultérieurement défini; l'exemple le plus simple en est une formule telle que $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$, ou bien des raisonnements de probabilités, tels que ceux dont j'ai donné des exemples dans mon Mémoire : *Sur les Probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques ;* mais je ne comprends pas le point de vue des analystes qui croient pouvoir raisonner sur un individu déterminé, mais non *défini;* il y a là une contradiction dans les termes sur laquelle j'ai plusieurs fois insisté.

Si je mentionne cette divergence de points de vue, bien qu'elle soit d'un intérêt surtout théorique (car, en définitive, personne n'a jamais considéré *un* être mathématique dont la définition complète eût exigé un nombre infini de mots), c'est qu'elle ne me paraît pas être sans rapport avec l'attitude pratique que prennent les mathématiciens dans l'orientation de leurs recherches.

Les uns s'intéressent surtout aux questions générales, d'autres aux problèmes particuliers; certains, enfin, voient dans les méthodes générales, non une fin en soi, mais un moyen pour résoudre quelques questions particulières. Pour nous borner à la théorie des fonctions, l'étude des fonctions particulières et celle des théories générales ne doivent être négligées ni l'une ni l'autre; mais on peut cultiver les théories générales pour elles-mêmes ou

en vue d'applications particulières. Il est évident que celui même qui cultive les théories générales en elles-mêmes ne peut espérer les appliquer à une fonction qui ne sera jamais construite; en ce sens, tous utilisent plus ou moins la méthode constructive; mais la différence pratique entre les uns et les autres me paraît néanmoins très grande. Ceux que j'appellerais volontiers les adeptes de la méthode constructive s'attachent spécialement à l'étude des fonctions construites par certaines méthodes qu'ils regardent comme simples et naturelles; c'est à ces fonctions et à ces procédés de construction qu'ils adaptent leurs démonstrations. Si, par la suite, on se trouve amené à considérer des procédés de construction nouveaux, ils seront amenés à compléter ou même à modifier leurs théories; c'est là, pour eux, un inconvénient réel et inévitable, auquel échappent les géomètres de l'autre école. Par contre, les démonstrations et les méthodes à objectif plus limité sont généralement plus simples et mieux adaptées à leur objet, plus aisément utilisables dans les applications; il arrive, d'autre part, le plus souvent que, lorsqu'on veut en arriver effectivement à l'application numérique, les méthodes en apparence plus générales de l'école non constructive exigent un effort d'adaptation équivalent à celui qui fut nécessaire pour la méthode constructive.

Enfin, si la méthode constructive a été judicieusement appliquée, c'est-à-dire si les procédés de construction considérés comme simples et naturels ont été bien choisis, il arrivera souvent que, dans la pratique, les résultats obtenus auront une généralité aussi grande qu'il est souhaitable, au moins pendant de nombreuses années. Comme exemples de choix qui me paraissent avoir été heureux, je me permettrai de citer les résultats que j'ai obtenus sur les fonctions entières à croissance régulière et sur la sommation des séries divergentes par la méthode exponentielle. Dans l'un et dans l'autre cas, la catégorie d'êtres analytiques auxquels s'appliquent ces résultats est infiniment restreinte, si l'on se place au point de vue abstrait. En fait, les seules fonctions entières nouvelles découvertes depuis vingt ans, à savoir les fonctions entières définies par les équations différentielles de M. Painlevé, sont à croissance régulière, et la méthode de sommation exponentielle a vu le champ de ses applications s'accroître beaucoup en ces dernières années; tout récemment encore, M. Nörlund est arrivé, par

des formules qui en dérivent, à des résultats de grande importance dans la théorie des équations aux différences finies.

Une théorie de la mesure et de l'intégration qui s'appliquerait aux fonctions que M. Baire appelle « de classe finie » et aux ensembles correspondants serait, dans la pratique, très suffisante pour l'enseignement élémentaire et même pour la plupart des chercheurs. C'est cette théorie que j'ai voulu édifier dans mon Mémoire de 1912 ; j'y traite des cas plus généraux, mais j'indique aussi que les démonstrations sont très notablement simplifiées lorsqu'on introduit ces restrictions ; il m'a paru inutile, pour éviter des redites, de développer explicitement ces démonstrations simplifiées ; elles sont aisées à rétablir. Cette exposition didactique me paraît devoir être, comme je le dis dans la Préface de la deuxième édition de mes *Leçons sur la théorie des fonctions*, une introduction à l'étude des belles recherches de M. Lebesgue (*voir* notamment **10** et **11**). Je ne prétends d'ailleurs pas être arrivé du premier coup à la forme didactique qui deviendra classique et pourra prendre place dans les Cours élémentaires de calcul différentiel et intégral ; j'espère du moins que mon Mémoire contribuera utilement à la simplification sans laquelle une théorie neuve ne devient pas classique. Ces simplifications résultent de l'emploi des domaines que j'ai appelés *élémentaires* (rectangles dans le cas de deux dimensions) et *simples* (nombre limité de domaines élémentaires) et aussi du fait que, en n'opérant que sur des polynomes, on n'a à considérer que des domaines *algébriques* pour lesquels de nombreuses complications *a priori* possibles se trouvent exclues [1].

La propriété fondamentale de l'intégrale est, à mes yeux, de donner la *valeur moyenne* d'une fonction dans un domaine ou sur une ligne ; cette interprétation d'une intégrale comme une valeur moyenne fut celle des fondateurs du calcul intégral ; elle est à la base des plus importants travaux de Cauchy ; depuis, les divers théorèmes de la moyenne et leurs généralisations n'ont pas cessé d'être parmi les principales applications du calcul intégral. En particulier, c'est comme une valeur moyenne que se présente en général l'intégrale définie dans les applications à la Mécanique et

---

[1] *Voir* plus haut, p. 9.

à la Physique mathématique. Sans méconnaître l'importance du point de vue qui définit l'intégration comme l'opération inverse de la dérivation, et sans mésestimer les profondes recherches par lesquelles M. Lebesgue et M. Denjoy sont arrivés à résoudre dans tous les cas le problème inverse de la dérivation, je continue à penser que les propriétés les plus importantes de l'intégrale définie sont celles qui se rattachent à la notion élémentaire de moyenne arithmétique : c'est à ces propriétés que conduit directement le mode d'exposition que j'ai adopté. Il n'y a aucune difficulté, dans les cas simples, à rattacher l'intégrale ainsi définie aux fonctions primitives ; si l'on veut arriver à traiter dans tous ses détails et toutes ses complications le problème général de la recherche des fonctions primitives, il est vraisemblable qu'on ne pourra pas échapper à des difficultés équivalentes à celles qu'ont surmontées M. Lebesgue et M. Denjoy.

Le mode d'exposition que j'ai adopté ne s'applique pas aux ensembles qui sont mesurables sans être bien définis ; pour tenir compte des résultats obtenus en 1917 par MM. Souslin et Lusin, il eût fallu rédiger d'une manière légèrement différente quelques phrases du Mémoire cité. Mais il n'en résulte pas qu'il n'y eût pas intérêt particulier à traiter à part les ensembles mesurables B, du moment qu'on peut les traiter d'une manière plus simple, car presque tous les ensembles que l'on rencontrera rentrent dans cette catégorie. C'est ainsi que la découverte de fonctions continues dépourvues de dérivées n'empêche pas l'étude des fonctions continues pourvues de dérivées de tenir une grande place dans les cours d'analyse. De même, en démontrant l'existence de fonctions monogènes non analytiques, je n'ai jamais pensé que la théorie des fonctions monogènes analytiques cesserait de devoir être enseignée et étudiée.

C'est ainsi qu'il faut, à mon avis, comprendre l'emploi de la méthode constructive. Pour reprendre comme exemple ma théorie de l'intégration des fonctions non bornées, je l'ai construite, comme je l'ai indiqué, ayant en vue certaines catégories de fonctions bien déterminées, dont j'avais besoin pour un but spécial : je crois que son champ d'application est notablement plus étendu ; mais je ne pense pas qu'elle perdrait nécessairement tout intérêt si l'on arrivait à construire une catégorie spéciale de fonctions

auxquelles elle ne s'appliquerait pas. S'il était nécessaire d'intégrer ces fonctions, on chercherait à bâtir pour leur intégrale une définition, en partant du procédé même par lequel elles auraient été construites. De même, si l'on découvre des fonctions entières ayant un mode de croissance différent de celui que j'ai appelé *régulier*, il sera vraisemblablement possible de construire pour elles une théorie analogue à celle que j'ai établie pour les fonctions à croissance régulière.

On peut juger que mon point de vue est d'un empirisme un peu méprisable. Il serait certainement plus noble de traiter d'un seul coup tous les problèmes et toutes les questions. Malheureusement, même lorsqu'on peut énoncer des résultats généraux, les difficultés particulières se présentent dès qu'on veut effectivement en arriver au détail des applications. Cela tient, au fond, à ce que, dès qu'on veut approfondir une question analytique quelconque, on se trouve très rapidement arrêté par la considération du transfini. Cette difficulté se présente dans la notion en apparence la plus élémentaire, dès qu'on quitte le domaine de l'algèbre, la notion du nombre irrationnel quelconque.

J'ai déjà indiqué en plusieurs occasions comment l'introduction d'un seul nombre irrationnel pouvait renfermer en germe les difficultés analytiques les plus compliquées; de tels résultats ont été parfois interprétés comme tendant à prouver qu'on ne peut pas écarter ces difficultés; ils devraient plutôt mettre en garde contre cette idée trop répandue, qu'on sait ce que c'est qu'un nombre irrationnel *quelconque*. En réalité, nous ne connaissons que ceux des nombres irrationnels que nous savons *construire* par des procédés déterminés, et, dans toute recherche où interviendra la nature arithmétique de ces nombres, il nous faudra limiter les procédés de construction que nous aurons le droit d'utiliser, sous peine d'ouvrir la porte à des difficultés transfinies. Il en est de même pour les fonctions entières croissantes, pour les séries de Taylor, pour les séries trigonométriques, pour les fonctions orthogonales, etc. La complication apparente qu'il y a à suivre pas à pas les méthodes constructives et à leur adapter les théories et les procédés de calcul est en réalité une simplification lorsqu'on en vient aux applications. Je ne conteste pas, bien entendu, l'utilité des théories générales et des synthèses hardies; elles sont souvent très

fécondes, assouplissent toujours l'esprit et le guident dans les applications de la méthode constructive; mais, à mes yeux, elles sont un moyen et non une fin en soi. J'ai exposé ce point de vue, il y a plus de vingt ans, à propos de la théorie des ensembles, dans la Préface de mes *Leçons sur la théorie des fonctions*; je n'ai pas varié sur ce point.

Je voudrais, en terminant, par une citation d'une phrase écrite depuis longtemps, préciser le point de vue auquel je me suis toujours placé pour apprécier les faits mathématiques; je sais que ce point de vue ne peut pas être logiquement imposé à l'adhésion de tous; mais, comme je le crois juste, je tiens d'autant plus à le signaler quand l'occasion s'en présente.

Il s'agissait de l'affirmation d'Euler, d'après laquelle les géomètres ne se tromperaient pas en attribuant la valeur $\frac{1}{2}$ à la série divergente

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots$$

M. Pringsheim avait formé un exemple dans lequel l'affirmation d'Euler était en défaut; il va de soi que tout analyste moderne formerait aisément de nombreux exemples de ce genre et que je ne l'ignorais pas lorsque j'avais repris pour mon compte l'affirmation d'Euler. Voici maintenant la conclusion à laquelle j'arrivais, après une discussion inutile à reproduire ici [1] :

« Pour prouver donc que l'affirmation d'Euler est fausse, en se plaçant au point de vue d'Euler, il faudrait fournir l'exemple d'un géomètre qui, *n'ayant aucune préoccupation relative aux séries divergentes et à la légitimité de leur emploi*, a trouvé, dans des calculs ayant pour objet des recherches d'un ordre tout différent, une série pour laquelle la règle d'Euler est en défaut.

» Tant qu'on n'aura pas fourni un tel exemple, on pourra dire que cette règle est exacte, *au point de vue pratique et expérimental*, puisque, depuis un siècle, elle n'aurait trompé aucun des géomètres qui l'auraient appliquée, sauf ceux qui se seraient précisément proposés comme but de la mettre en défaut; ceux-là, non

---

[1] *Leçons sur les séries divergentes*, p. 8 (**3**).

plus, n'auraient d'ailleurs pas été trompés, puisqu'ils savaient à l'avance le but vers lequel ils tendaient. »

J'ajouterai que ceux-là même qui ne seraient pas entièrement d'accord avec moi sur ce point de vue initial ne peuvent contester la rigueur et l'importance de la théorie des séries divergentes à laquelle il m'a conduit et que de nombreux géomètres ont développée depuis mes premiers travaux. D'une manière analogue, ceux-là même qui considéreraient comme défectueuse, en raison de son défaut de généralité, ma définition de l'intégrale des fonctions non bornées, ne me paraissent pas pouvoir contester la rigueur et l'utilité mathématique des déductions qui ont été ou qui seront tirées de cette définition par ceux qui se seront placés à mon point de vue.

CHAPITRE III.

LA THÉORIE DE LA CROISSANCE ET LE ROLE DES CONSTANTES ARBITRAIRES.

Généralités.

La rapidité de la croissance des fonctions est une de leurs propriétés les plus importantes; la classification complète des modes de croissance soulèverait des difficultés transfinies; fort heureusement, la construction naturelle des fonctions conduit toujours à des modes de croissance simples, dérivés du type exponentiel. Cette importance spéciale du type exponentiel est mise en évidence par la théorie des fonctions entières (**2**) et par celle des séries divergentes (**3**); c'est sur elle qu'est basée la théorie générale de la croissance (**7**). Il convient d'observer que si l'on se reconnait le droit de construire des fonctions à partir du nombre incommensurable *le plus général*, sans se préoccuper de savoir s'il est *bien défini*, on réintroduit toutes les difficultés transfinies entraînées par les croissances irrégulières. On peut comparer cette importance du type exponentiel et de quelques autres types simples à l'importance prise dans le règne animal par les vertébrés, ou par les insectes. On pourrait concevoir *a priori* que l'évolution animale aurait pu conduire à d'autres types aussi différents des insectes et des vertébrés que ceux-ci sont différents entre eux, l'étude de ces hypothèses est loin de présenter le même intérêt que l'étude des espèces existantes.

Il serait donc désirable de pouvoir démontrer que tous les nombres incommensurables effectivement définis d'une manière directe (par exemple au moyen d'équations différentielles algébriques, ou d'intégrales définies) ne présentent pas de singularités *exceptionnelles* au point de vue de la croissance; ceux qui sont

définis d'une manière artificielle (par des séries à lacunes, par exemple) ne présentent eux-mêmes que les singularités qui y ont été introduites, et qui sont nécessairement en nombre fini (une suite énumérable bien définie fournit évidemment une suite énumérable de singularités, mais on peut encore dire que cet ensemble énumérable de singularités forme une seule singularité pouvant être définie au moyen d'un nombre fini de mots).

Dans les quelques Notes reproduites ci-après, on trouvera plutôt des problèmes posés que des solutions; la question difficile de la nature arithmétique des constantes qui s'introduisent en analyse est à peine effleurée; c'est seulement par des moyens entièrement neufs qu'elle pourra peut-être être résolue un jour; c'est là une des questions les plus passionnantes et les plus importantes des mathématiques.

Sur la croissance des fonctions définies par des équations différentielles (¹).

1. Considérons une fonction réelle y de la variable réelle x; si y augmente indéfiniment quand x tend vers a, on peut se proposer d'étudier la rapidité de la croissance de y; on posera $|x - a| = \frac{1}{z}$ et $|y| = \varphi(z)$; par hypothèse, $\varphi(z)$ sera une fonction positive croissante de la variable positive z. Dans le cas où y serait indéterminé pour $x = a$, son champ d'indétermination s'étendant ou non jusqu'à l'infini, on pourrait aussi définir une fonction positive croissante, dépendant de la rapidité des variations de y.

2. Relativement aux fonctions positives croissantes, Paul du Bois-Reymond a démontré un théorème important (²) : *Étant donnée une infinité dénombrable quelconque de fonctions positives croissantes, on peut trouver une fonction positive croissante qui croisse plus vite que chacune d'elles.* Le but de cette Note est d'indiquer un champ étendu d'applications dont ce théorème paraît susceptible.

(¹) *Comptes rendus*, t. 128, 20 février 1899, p. 500.

(²) Voir mes *Leçons sur la Théorie des fonctions*, Note II.

3. Considérons, pour fixer les idées, une équation différentielle obtenue en égalant à zéro *un polynome quelconque en* x, y, y', y'', y''', *à coefficients entiers*, et une intégrale réelle y de cette équation, *définie par des conditions initiales rationnelles quelconques* x_0, y_0, y'_0, y''_0. Lorsque x varie sur l'axe réel à partir de x_0, y variera d'une manière continue et sera déterminé, jusqu'à ce que l'on atteigne un point singulier a. A ce point singulier, nous pouvons, d'après ce qui précède, faire correspondre une fonction positive croissante $\varphi(z)$, bien déterminée.

Or il est clair que *l'ensemble des fonctions* $\varphi(z)$ *qui peuvent être définies ainsi est dénombrable;* il existe donc une fonction $\Phi(z)$ qui les dépasse toutes par la rapidité de sa croissance.

En d'autres termes, *il existe une fonction* $\Phi(z)$ *ayant la propriété suivante : Toute fonction* $\varphi(z)$, *obtenue comme il vient d'être dit, croît moins rapidement que* $\Phi(z)$.

On verrait très aisément que, si les coefficients de l'équation différentielle, ou même seulement les valeurs initiales, n'étaient plus assujettis à la condition d'être rationnels, on pourrait, étant donnée *a priori* une fonction *quelconque* $\Phi(z)$, obtenir une fonction y, telle que la fonction correspondante $\varphi(z)$ croisse plus vite que $\Phi(z)$ [1]. Cette remarque était nécessaire pour justifier la restriction que nous imposons aux coefficients et aux conditions initiales.

La détermination effective de la fonction $\Phi(z)$ ne paraît pas aisée; c'est cependant quelque chose d'être assuré de son existence; un sujet bien précis de recherches nouvelles se trouve ainsi offert à la sagacité des géomètres.

4. Il nous paraît inutile d'insister sur les généralisations innombrables et extrêmement étendues dont est susceptible la proposition que nous venons d'énoncer; il suffit, pour y être conduit, de remarquer que tout ensemble dénombrable d'ensembles dénombrables est un ensemble dénombrable.

5. Étant donné un nombre incommensurable, si on le réduit en fraction continue, le $n^{\text{ième}}$ quotient incomplet a_n peut être une

---

(1) *Voir* mon *Mémoire sur les séries divergentes* (*Annales de l'École Normale*, 1899, p. 47; note du bas).

fonction croissante de n. Sinon, soit $\varphi(n)$ le plus grand des nombres $a_1, a_2, \ldots, a_q$; la fonction $\varphi(n)$ n'est pas décroissante. On peut se proposer d'étudier la rapidité de la croissance de $\varphi(n)$ pour une classe déterminée de nombres incommensurables. Par exemple, il résulte de recherches de Liouville [1] que, pour les nombres algébriques, la fonction $\varphi(n)$ croît moins rapidement qu'une puissance positive de n. Plus généralement, étant donné un ensemble dénombrable quelconque de nombres incommensurables, il existe une fonction $\Phi(n)$ dépassant toutes les fonctions de $\varphi(n)$ qui leur correspondent; le problème se pose dès lors de la détermination effective de $\Phi(n)$. On pourrait considérer, par exemple, les valeurs que prennent des fonctions y définies plus haut, lorsqu'on donne à x des valeurs rationnelles, etc. On pourrait aussi se borner à considérer les logarithmes des nombres rationnels, ou des nombres algébriques, etc.

J'ai déjà indiqué, à diverses reprises (voir, notamment, *Comptes rendus*, 16 décembre 1895), l'importance de la fonction $\varphi(n)$ dans diverses questions où interviennent des nombres incommensurables.

Sur la nature arithmétique du nombre e [2].

1. Désignons par $P(x)$ un polynome irréductible, de degré n, à coefficients entiers et par p et q deux entiers premiers entre eux. Il est clair que l'on a $P\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{A}{q^n}$, A étant un nombre *entier* essentiellement différent de zéro, et cette simple remarque a conduit Liouville à des conséquences importantes relativement à l'approximation des nombres algébriques par des nombres rationnels. On peut aisément étendre ces considérations à l'étude de l'approximation des nombres algébriques par des nombres algébriques : il suffit de remarquer que le résultant de deux polynomes à coefficients entiers est un nombre entier et que, par suite, si les deux polynomes sont irréductibles, la valeur absolue du résultant est au moins égale à *un*. Considérons dès lors un nombre

---

[1] *Comptes rendus*, t. 128, 6 mars 1899, p. 596.

[2] Voir mes *Leçons sur la Théorie des fonctions*, Chap. II.

algébrique α racine d'une équation irréductible de degré n, et cherchons à déterminer les coefficients (entiers) d'une équation irréductible de degré r, de manière qu'une racine β de cette équation diffère de α d'une quantité moindre que le nombre positif donné ε. Nous serons obligé de prendre les coefficients d'autant plus grands que ε sera plus petit ; le résultat que nous voulons énoncer est le suivant : *α et r étant donnés, la somme des valeurs absolues des coefficients est constamment supérieure à* $M\varepsilon^{-\mu}$, M *et* μ *étant des nombres fixes qu'il serait aisé de calculer.*

Le théorème de Liouville est relatif au cas où $r = 1$; μ est alors égal à $\frac{1}{n}$. On pourrait aussi supposer r variable ; il faudrait alors, au lieu de considérer la somme des valeurs absolues des coefficients, considérer cette somme augmentée de r, ou d'une fonction positive de r, et l'on aurait des théorèmes analogues.

2. On sait, depuis la publication du Mémoire célèbre de M. Hermite, que le nombre e ne peut être racine d'une équation algébrique à coefficients entiers. On peut se proposer d'approcher du nombre e, soit par des nombres rationnels, soit par des nombres algébriques de degré déterminé. On trouve ainsi des résultats qui, sans être identiques à ceux que nous venons de rappeler, leur ressemblent beaucoup et établissent ainsi un rapprochement curieux entre le nombre e et les nombres algébriques.

Reprenons, pour fixer les idées, le polynome irréductible $P(x)$, de degré n, à coefficients entiers. Si l'on pose, avec M. Hurwitz (*Comptes rendus*, 1893),

$$f(x) = \frac{1}{(p-1)!}x^{p-1}(1-x)^p(2-x)^p\ldots(n-x)^p,$$
$$F(x) = f(x) + f'(x) + f''(x) + \ldots,$$
$$P(x) = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \ldots + C_nx^n,$$

on obtient

$$F(0)P(e) = A + \varepsilon_p,$$

A étant un nombre entier essentiellement différent de zéro, et ε_p tendant vers zéro lorsque p augmente.

Cette formule est tout à fait analogue à celle que nous avons appelée $q^nP\left(\frac{p}{q}\right) = A$. Il s'agit seulement d'évaluer l'ordre de

grandeur de $F(\sigma)$, lorsque p est pris assez grand pour que $|\varepsilon_p|$ soit inférieur à un nombre plus petit que un, de manière que $|A + \varepsilon_p|$ soit supérieur à un nombre assignable. M. Hurwitz prend pour p un nombre premier plus grand que C_0 et que n; on constatera aisément qu'il suffit que p soit plus grand que n et premier avec C_0. Si l'on suppose que les nombres C augmentent indéfiniment, et que l'on cherche à prendre p le plus petit possible, le cas le plus défavorable est évidemment celui où C_0 est le produit $2.3.5.7.11.13\ldots q$ de nombres premiers se suivant dans l'ordre naturel, à partir de 2. Il faut alors prendre pour p un nombre premier supérieur à q. La valeur de p fournie par cette considération satisfait d'ailleurs, lorsque C_0 est assez grand (n est fixe), à la condition que nous avons énoncée relativement à ε_p. On est ainsi conduit au résultat suivant :

Le nombre n étant donné, si l'on cherche à déterminer les coefficients du polynome $P(x)$ *de manière que* $P(e)$ *soit inférieur à* ε, *la somme de leurs valeurs absolues est constamment supérieure à* $M\varepsilon^{-\mu}$, M *étant un nombre fixe et* μ *défini par la relation* $\frac{k}{\mu} = \log\log\frac{1}{\varepsilon}$. (M et k sont des constantes.) On voit que ce résultat se rapproche de celui que nous avons énoncé pour les nombres algébriques, bien qu'ici μ, au lieu d'être constant, tende vers zéro avec ε; *mais la décroissance de μ est infiniment moins rapide que celle de* ε.

3. Il serait aisé de généraliser ce résultat, et d'énoncer des propositions applicables à tous les nombres algébriques en e, c'est-à-dire racines d'équations dont les coefficients sont des polynomes en e à coefficients entiers. Il y aurait lieu de chercher à les étendre aussi dans la direction qui est naturellement suggérée par la lecture du beau travail de M. Lindemann et du Mémoire de Weierstrass (*Sitzungsberichte der Berliner Academie*, 1885).

4. On remarquera, sans qu'il soit nécessaire d'y insister, la relation qu'il y a entre les résultats ici obtenus et les sujets de recherches que j'ai indiqués dans une Note récente. Des considérations analogues aux précédentes s'appliqueront toutes les fois que l'on aura prouvé qu'une équation ne peut avoir lieu, en

s'appuyant sur ce qu'un nombre entier non nul diffère de zéro d'une quantité finie. En étudiant de près la démonstration, on constatera que, non seulement elle prouve que le premier membre de l'équation considérée diffère de zéro, mais qu'elle donne de plus une limite inférieure de cette différence.

Sur les types de croissance et sur les fonctions entières (1).

La théorie des zéros des fonctions entières, dans laquelle d'importants résultats avaient été obtenus par Laguerre et par M. Poincaré, a été renouvelée par le Mémoire de M. Hadamard, que l'Académie a couronné en 1892. En m'appuyant sur les résultats de ce Mémoire et sur un théorème fondamental, donné par M. Picard dès 1880, j'ai obtenu une proposition très générale, que j'ai eu l'honneur de communiquer à l'Académie le 12 octobre 1896. Il semble que (si l'on se borne à considérer les modules des zéros, sans s'inquiéter de leurs arguments) cette théorie se trouve maintenant ébauchée dans ses traits essentiels : on doit donc s'occuper d'en perfectionner les détails. C'est dans l'espoir d'y arriver sur quelques points que j'ai entrepris les recherches résumées dans cette Note.

L'une des plus grandes difficultés que l'on rencontre dans l'étude des fonctions entières provient de l'infinie multiplicité des *types de croissance* possibles : les raisonnements applicables à tous ces types sont à la fois ardus et difficiles à étendre (2). D'ailleurs, ces difficultés ne se présentent pas seulement lorsqu'on considère des fonctions qui croissent extrêmement vite : à cause d'un principe analogue à celui de l'*homogénéité du continu*, il y a *exactement les mêmes difficultés* à faire une étude *complète* des fonctions qui croissent plus vite que e^x et moins vite que e^{2x}, par exemple, qu'à faire l'étude de toutes les fonctions croissantes. Aussi, *en nous bornant dans ce qui suit aux fonctions entières de genre fini*, nous ne restreignons pas la généralité autant qu'on

(1) *Comptes rendus*, t. 126, 24 janvier 1898, p. 321.

(2) J'ai donné un exemple d'un tel raisonnement dans ma Note du 11 mai 1896 [voir mes *Leçons sur les fonctions entières* (2), Note I].

pourrait le croire. D'ailleurs, on verra aisément que plusieurs des remarques qui suivent s'étendent sans peine au cas général.

On peut associer à toute fonction entière une fonction positive croissante $M(r)$, égale au maximum du module de la fonction entière pour $|z| = r$. L'hypothèse que la fonction est de genre fini s'exprime par le fait qu'il existe un nombre positif ρ' tel que l'on ait, à partir d'une certaine valeur de r, $M(r) < e^{r^{\rho'}}$. Il y a évidemment alors une infinité de tels nombres ρ'; si ρ désigne leur limite inférieure (qui n'est pas nécessairement atteinte), on dit que la fonction est d'*ordre apparent* ρ. Si, d'autre part, on désigne par a_n le module du $n^{ième}$ zéro de la fonction, la limite inférieure ρ des nombres ρ', tels que la série $\Sigma a_n^{\rho'}$ soit convergente, est dite l'*ordre réel* de la fonction. Le théorème fondamental qui, pour les fonctions de genre fini, résume les recherches citées plus haut, est le suivant : *sauf le cas d'exception unique de M. Picard, l'ordre réel est égal à l'ordre apparent*. D'ailleurs, ce cas d'exception ne peut se présenter que si l'ordre apparent ρ est un nombre entier. Nous nous proposons de préciser, dans certains cas, ce résultat, ou, plus exactement, de préciser les conséquences que l'on peut en tirer relativement à la croissance des a_n; nous poserons $a_n = \theta(n)$.

Nous dirons qu'une fonction croissante $\varphi(r)$ appartient *au type exponentiel* s'il existe un nombre positif ρ, tel que, quel que soit le nombre positif ε, les inégalités $e^{r^{\rho-\varepsilon}} < \varphi(r) < e^{r^{\rho+\varepsilon}}$ soient vérifiées à partir d'une certaine valeur de r; de plus, s'il en est ainsi, nous conviendrons de dire aussi que $\log \varphi(r)$ et $e^{\varphi(r)}$ appartiennent au type exponentiel.

Avec ces définitions, la première proposition que nous avons à énoncer est la suivante : *Si la fonction* $M(r)$ *appartient au type exponentiel, il en est de même de la fonction* $\theta(n)$ *et réciproquement* (à moins que l'on ne se trouve dans le cas de M. Picard). On voit que cette proposition permet de préciser beaucoup les résultats obtenus sur les a_n; en effet, si l'on connaît seulement l'*ordre apparent* ρ, sans rien savoir du *type de croissance* de $\theta(n)$, les circonstances les plus diverses peuvent se présenter; car une série peut être convergente, tout en ayant une infinité de termes supérieurs aux termes correspondants d'une série divergente. Au contraire, si, l'ordre apparent étant ρ, on sait de plus

que la fonction $\mathcal{G}(n)$ appartient *au type exponentiel*, on peut affirmer que *les inégalités* $n^{\frac{1}{2}-\varepsilon} < a_n < n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ *sont vérifiées à partir d'une certaine valeur de n*.

Pour obtenir, dans chaque cas, un résultat aussi précis que celui-là, il faudrait étudier d'autres *types de croissance*; mais cette étude longue et peut-être indéfinie ne semble pas nécessaire si l'on remarque que *toutes les fonctions croissantes qui s'introduisent naturellement en Analyse appartiennent au type exponentiel ou à des types s'y rattachant directement*. Cette remarque me paraît d'ailleurs avoir de l'importance dans bien des questions.

Parmi les types de croissance que l'on peut *fabriquer*, si je puis ainsi dire, mais qui ne s'offrent pas naturellement, *les types lacunaires* sont parmi les plus curieux. Pour faire comprendre ce que j'entends par là, je vais donner un exemple d'un type lacunaire qui se rattache indirectement à la fonction exponentielle. Dans le développement en série de e^x, ne conservons que les termes dont le rang est n^n, n étant un entier; nous obtiendrons une fonction croissante $\varphi(x)$ qui, pour une infinité de valeurs de x, différera extrêmement peu de e^x (leur rapport sera de l'ordre de grandeur de $\sqrt{x}$), mais qui, en général, sera beaucoup plus petite que e^x. Si l'on suppose x imaginaire, la fonction entière $\varphi(x)$ offre la propriété curieuse de différer extrêmement peu de certains polynomes dans des couronnes circulaires dont l'étendue est très considérable (¹). Cette propriété permet d'étudier avec la plus grande facilité la distribution des zéros d'une telle fonction; de plus, on voit que, dans ces couronnes, pour toutes les valeurs de x qui ont même module, la fonction a sensiblement le même module, c'est-à-dire que le module de la fonction diffère très peu de son maximum.

Enfin, pour ces fonctions et, d'une manière générale, *pour toutes celles qui n'appartiennent pas au type exponentiel, le cas d'exception de M. Picard ne peut pas se présenter*.

(¹) Pour préciser, si l'on considère un cercle de centre fixe et de rayon croissant, le rapport des aires des couronnes intérieures au cercle, à l'aire du cercle, tend vers *un* lorsque le rayon augmente indéfiniment.

Dans le cas où une fonction croissante $\varphi(r)$ n'appartient pas au type exponentiel, il peut arriver qu'il existe des nombres ρ' et ρ'', tels que les inégalités $e^{r^{\rho'}} < \varphi(r) < e^{r^{\rho''}}$ soient vérifiées à partir d'une certaine valeur de r; mais la limite supérieure ρ_1 des diverses valeurs de ρ' ne coïncide pas avec la limite inférieure ρ des diverses valeurs de ρ''. On peut alors, en étendant une manière de parler introduite, mais insuffisamment définie par Paul du Bois-Reymond, dire que la fonction a des *enveloppes d'indétermination exponentielles*. En introduisant ces nombres ρ *et* ρ_1, on peut obtenir, sur les zéros, des résultats assurément moins précis que dans le cas du type exponentiel, mais plus précis que dans le cas général. Observons aussi que, même dans le cas du type exponentiel, les théorèmes qui précèdent, comme je l'ai déjà remarqué ailleurs, n'épuisent pas la question.

Enfin, en terminant, indiquons que les observations ici présentées sur les types de croissance, et en particulier sur le rôle prépondérant du type exponentiel, ne sont pas restreintes aux fonctions entières. Des observations analogues s'appliqueraient à l'étude d'une série de Taylor quelconque; la distribution des zéros d'une telle fonction à l'intérieur de son cercle de convergence suit des lois générales analogues à celles qu'on vient de rappeler, mais un peu moins simples (1).

Sur quelques fonctions entières (2).

J'ai déjà eu l'occasion de signaler (3) les singularités qui peuvent se présenter dans la croissance des fonctions entières et les conséquences qui en résultent pour la distribution des zéros.

Ayant été conduit à reprendre la question dans mon cours de

---

(1) Renseignements bibliographiques principaux relatifs à cette Note : L. PICARD, *Mémoire sur les fonctions entières* (*Annales de l'École Normale*, 1880). — LAGUERRE, *Comptes rendus*, 1882-1884; *Œuvres*, t. I. — H. POINCARÉ, *Sur les fonctions entières* (*Bulletin de la Société mathématique*, 1883). — J. HADAMARD, *Sur les propriétés, etc.* (*Journal de Mathématiques*, 1893). — E. BOREL, *Sur les zéros des fonctions entières* (*Acta mathematica*, t. XX). — DU BOIS-REYMOND, *Théorie générale des fonctions*, p. 209 et 210 de la traduction française.

(2) *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, t. XXIII, 14 avril 1907.

(3) *Leçons sur les fonctions entières* (2), Notes II et III.

cet hiver à la Sorbonne, j'ai constaté que l'emploi des séries présentant des lacunes fournissait la méthode la plus simple pour mettre en évidence, d'une manière élémentaire, de telles singularités. Voici comment on peut procéder.

Prenons comme série type, la série e^x; nous poserons

$$\varphi(n) = \frac{x^n}{n!},$$

de telle manière que la série type se présente sous la forme

$$e^x = \varphi(0) + \varphi(1) + \varphi(2) + \ldots + \varphi(n) + \varphi(n+1) + \ldots.$$

Nous allons étudier la fonction entière $f(x)$ définie par la série à lacunes :

$$f(x) = \varphi(n_0) + \varphi(n_1) + \varphi(n_2) + \ldots + \varphi(n_p) + \varphi(n_{p+1}) + \ldots,$$

dans laquelle $n_0, n_1, n_2, \ldots, n_p, n_{p+1}, \ldots$ désignent des entiers croissants.

Étudions tout d'abord les variations de $\varphi(n)$ lorsque x varie au voisinage de n. On a, d'après un résultat bien connu,

$$\log \varphi(n) = n \log x - \log \Gamma(n+1) = n \log x - \left(n + \frac{1}{2}\right) \log n + n + A_n,$$

A_n tendant vers la limite $-\frac{1}{2}\log 2\pi$ lorsque n tend vers l'infini.

Si l'on pose $x = n^\alpha$, il vient

$$\log \varphi(n) = \left(\alpha n - n - \frac{1}{2}\right) \log n + n + A_n.$$

Donc si α est un nombre fixe inférieur à l'unité, $\varphi(n)$ tend vers zéro lorsque n augmente indéfiniment. Si α est supérieur à l'unité, la partie principale de $\log \varphi(n)$ est $n \log x$, c'est-à-dire $x^{\frac{1}{\alpha}} \log x$.

Ces résultats étant acquis, désignons par α un nombre supérieur à l'unité et supposons que l'on ait, quel que soit p,

$$n_{p+1} > n_p^\alpha.$$

Si nous donnons à x la valeur n_p^β, β étant un nombre compris entre 1 et α, x sera compris entre n_p et n_{p+1}, et il est visible que le

terme du plus grand module dans la série $\varphi(x)$ sera le terme $\varphi(n_p)$. De plus, non seulement le module des autres termes sera inférieur au module de celui-là, mais *il sera complètement négligeable par rapport à celui-là*; il suffit de le vérifier pour le terme qui le précède et pour celui qui le suit immédiatement. On a, en effet, en posant $x = n_p^\beta$,

$$\log \varphi(n_p) = n_p \log x - \left(n_p + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{\beta}\log x + n_p + A_{n_p},$$

$$\log \varphi(n_{p+1}) = \beta n_{p+1} \log n_p - \left(n_{p+1} + \frac{1}{2}\right) \log n_{p+1} + n_{p+1} + A_{n_{p+1}},$$

$$\log \varphi(n_{p-1}) = n_{p-1} \log x - \left(n_{p-1} + \frac{1}{2}\right) \log n_{p-1} + n_{p-1} + A_{n_{p-1}},$$

et comme $n_{p+1} > n_p^\alpha$ et $n_{p-1} < n_p^{\frac{1}{\alpha}}$, on voit que $\varphi(n_{p+1})$ est très voisin de zéro, tandis que $\varphi(n_p)$ est de l'ordre de x^{n_p} et $\varphi(n_{p-1})$ de l'ordre de $x^{n_{p-1}}$. Donc $f(x)$ est égal au produit de $\varphi(n_p)$ par $1 + \varepsilon$, ε étant d'autant plus voisin de zéro que n_p est plus grand (β et α restant fixes). On a, par suite, en supposant pour un instant x positif et posant

$$f(x) = e^{x^\mu},$$

la relation

$$x^\mu = n_p \log x - \left(n_p + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{\beta}\log x + n_p + A_{n_p};$$

d'où l'on conclut, n_p étant égal à $x^{\frac{1}{\beta}}$,

$$\mu = \frac{1}{\beta} + \varepsilon,$$

ε tendant vers zéro lorsque, α et β restant fixes, n_p augmente indéfiniment.

Supposons maintenant que l'argument de x soit quelconque; on obtiendra de même :

$$|f(x)| = e^{|x|^\mu},$$

μ étant toujours égal à $\frac{1}{\beta} + \varepsilon$.

Si donc on fait varier x d'une manière continue de 0 à l'infini par un chemin quelconque, le module de $f(x)$ pourra être déterminé d'une manière précise pour les valeurs de x comprises entre $n_p^{\beta'}$ et $n_p^{\beta''}$, β' et β'' étant deux nombres quelconques assujettis

à la seule condition d'être positifs et compris entre 1 et α, la limite supérieure α exclue. Si l'on pose

$$\mu' = \frac{1}{\beta'}, \qquad \mu = \frac{1}{\beta},$$

le module de $f(x)$ prend ainsi des valeurs comprises entre $e^{x^{\mu'}}$ et $e^{x^{\mu}}$. On peut d'ailleurs prendre $\beta' = 1$, d'où $\mu' = 1$ et β aussi voisin que l'on veut de α, de sorte que μ est aussi voisin que l'on veut de $\frac{1}{\alpha} = \lambda$. Dès lors on voit que $|f(x)|$ est égal tantôt à e^{x} et tantôt à $e^{x^{\lambda}}$.

Il n'est pas superflu d'observer que la fonction $f(x)$, pour des valeurs positives de x, est positive *ainsi que toutes ses dérivées*; cette propriété n'est nullement incompatible avec celle que nous venons d'énoncer : pour certaines valeurs de x, le rapport de $f(x)$ à e^{x} est très voisin de un, et, pour d'autres valeurs de x, le rapport de $f(x)$ à $e^{x^{\lambda}}$ est très voisin de un.

Étudions maintenant la distribution des zéros de la fonction entière $f(x)$. Au lieu d'employer les méthodes générales, il est plus court d'utiliser un théorème bien connu [1].

Si l'on a, sur un contour C, à l'intérieur duquel $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont holomorphes :

$$\left|\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right| < 1,$$

les deux fonctions $\psi(x)$ et $f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$ ont le même nombre de zéros à l'intérieur de C.

Il suffit de prendre, en conservant les notations précédentes,

$$\psi(x) = \varphi(n_p),$$
$$\varphi(x) = f(x) - \varphi(n_p),$$

le contour C étant le cercle

$$|x| = n_p^{\beta}.$$

On en conclut que le nombre des zéros de $f(x)$ à l'intérieur du

(1) Voir Hermite, *Cours d'Analyse*. Leçons sur la série de Lagrange.

cercle C est égal au nombre de zéros de $\psi(x)$, c'est-à-dire à n_p. Ce résultat est le même, quelle que soit la valeur de β entre β' et β'' : on en conclut que la fonction $f(x)$ n'a pas de zéros dans la couronne comprise entre les cercles C'_p et C''_p :

$$(C'_p) \qquad |x| = n_p^{\beta'},$$
$$(C''_p) \qquad |x| = n_p^{\beta''}.$$

Dans la couronne circulaire comprise entre le cercle C''_p et le cercle C'_{p+1} la fonction $f(x)$ a $n_{p+1} - n_p$ zéros.

On voit que la distribution des zéros est lacunaire, de la même manière que la distribution des termes de la série. Les surfaces des couronnes circulaires successives comprises entre les cercles C'_p, C''_p, C'_{p+1}, C''_{p+1}, C'_{p+2}, ... vont en augmentant indéfiniment ; mais les couronnes renfermant des zéros sont *relativement* plus étroites que les autres, si l'on choisit convenablement β' et β'' ; d'une manière précise, en désignant par R'_p, R''_p, R'_{p+1}, ... les rayons des cercles C'_p, C''_p, C'_{p+1}, ..., on peut s'arranger de manière que, lorsque p augmente indéfiniment, le rapport

$$\frac{\log R''_p}{\log R'_p}$$

diffère aussi peu que l'on veut de α, tandis que le rapport

$$\frac{\log R'_{p+1}}{\log R''_p}$$

diffère aussi peu que l'on veut de l'unité.

Il est clair que l'exemple précis que nous avons choisi peut être modifié d'une infinité de manières.

Sur les équations aux dérivées partielles à coefficients constants et les fonctions non analytiques (¹).

Dans une Note récente (2 décembre), j'ai indiqué un développement en série des fonctions de deux variables réelles admettant des dérivées de tous les ordres, développement dont les dérivées

(¹) *Comptes rendus*, t. 121, 16 décembre 1895, p. 933.

représentent les dérivées de la fonction. En cherchant à utiliser ce développement pour l'étude des équations aux dérivées partielles à coefficients constants, j'ai été conduit à des résultats que je publierai prochainement. Je voudrais, dans cette Note, indiquer brièvement l'un de ces résultats et faire connaître, en même temps, sur un exemple simple, l'esprit de la méthode que j'ai suivie.

Désignons par α un nombre incommensurable ([1]), tel que $\frac{m_i}{n_i}$ étant l'une quelconque des réduites du développement de α en fraction continue, l'on ait

(1) $$|m_i - n_i\alpha| < e^{-m_i-n_i},$$

et considérons la série

$$\varphi(x, y) = \sum_i a^{m_i} b^{n_i} \cos m_i^2 x \cos n_i^2 y,$$

dans laquelle a et b sont inférieurs à *un*. Les valeurs de m_i, n_i croissant très rapidement avec i, on conclut aisément d'un théorème de M. Hadamard que la fonction φ *n'est, en aucun point, une fonction analytique de x et de y.*

Posons, d'autre part,

(2) $$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \alpha^4 \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \psi(x, y).$$

Il résulte immédiatement des inégalités (1) que la fonction ψ est holomorphe dans tout le plan de chacune des deux variables x et y, car la série à triple entrée obtenue en remplaçant dans ψ les cosinus par leurs développements de Taylor est *absolument* convergente, quels que soient x et y.

Supposons maintenant que nous considérions *a priori* l'équation aux dérivées partielles (2), dans laquelle ψ est une fonction donnée admettant la période 2π par rapport à x et à y, et que nous nous proposions d'en trouver une intégrale φ admettant la même période et continue, ainsi que ses dérivées pour toutes les valeurs réelles des variables. Suivant la nature de la fonction ψ et de la constante α, le problème pourra être possible, impossible ou in-

---

([1]) Au sujet de l'existence de tels nombres α, on peut consulter la Note qui termine ma Thèse.

déterminé ; ce n'est point ici le lieu d'en faire une discussion détaillée, mais un fait important résulte de ce qui précède : pour certaines valeurs de α, on peut se donner pour ψ une fonction analytique et trouver, *comme unique solution* pour φ, une fonction non analytique. Je ne crois pas que l'on connaisse un tel exemple d'une fonction de deux variables réelles, qui ne soit analytique *en aucun point* (x, y), et qui s'introduise *nécessairement* à propos d'un problème *très simple* dans l'énoncé duquel ne figure qu'une fonction analytique des deux variables.

Sur les équations linéaires aux dérivées partielles [1].

On peut établir le théorème suivant :

Étant donnée une équation linéaire aux dérivées partielles à coefficients analytiques, toute intégrale analytique de cette équation est donnée par la formule

$$z = \int_0^{2\pi} \theta(x_1, x_2, \ldots, x_n; a_1, a_2, \ldots, a_n, r, \alpha) f(\alpha)\, d\alpha.$$

Dans cette formule $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les variables ; θ est une intégrale particulière dépendant de $n+2$ constantes $a_1, a_2, \ldots, a_n, r, \alpha$, dont on sait calculer, par les méthodes de Cauchy, un développement en série ; $f(\alpha)$ est une fonction réelle arbitraire de la variable réelle α, admettant la période 2π et ayant des dérivées de tout ordre dans tout intervalle.

L'ordre de l'équation considérée est d'ailleurs quelconque.

Sur les périodes des intégrales abéliennes et sur un nouveau problème très général [2].

1. Beaucoup de problèmes d'Analyse peuvent être ramenés au problème de la détermination des relations linéaires à coefficients entiers qui peuvent exister entre des nombres transcendants ; par

[1] *Comptes rendus*, t. 120, p. 677. (*Voir* pour les démonstrations : *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. 19, 2e série, 1895.)
[2] *Acta mathematica*, t. 27, 1903.

exemple entre les périodes de certaines intégrales elliptiques ou abéliennes. C'est ainsi que M. Painlevé a ramené plusieurs problèmes de la théorie des équations différentielles au suivant : reconnaître si une certaine intégrale abélienne n'a que deux périodes (¹).

Je ne prétends pas indiquer ici une solution à cette difficile question, qui restera sans doute longtemps encore au-dessus des moyens de l'analyse ; je voudrais seulement chercher à attirer l'attention des géomètres sur quelques réflexions simples, qui sont peut-être de nature à suggérer une méthode nouvelle pour aborder toute une classe de problèmes comprenant celui-ci comme cas très particulier.

2. Faisons d'abord quelques remarques générales. Il est évidemment nécessaire que les coefficients constants dont dépendent les périodes considérées soient définis d'une manière précise, et non pas connus seulement avec quelque approximation. Or, les seuls nombres connus primitivement d'une manière précise sont les nombres entiers ; par une infinité de procédés de nature algébrique ou transcendante, on peut, à l'aide des nombres entiers, définir une infinité d'autres nombres, qui seront, eux aussi, connus d'une manière précise (²). Nous supposerons que l'on a fait un choix entre ces divers procédés, c'est-à-dire que l'on en a conservé un nombre limité à l'exclusion des autres. De plus, nous supposerons que l'on a choisi un nombre entier N auquel on supposera inférieurs tous les nombres entiers introduits dans les calculs, et tel de plus que le nombre des opérations d'une nature quelconque, que l'on suppose effectuées sur ces nombres entiers, soit inférieur à N. Par exemple, si l'on veut introduire un nombre algébrique, les coefficients et le degré de l'équation qui le définit, seront inférieurs à N, etc.

(¹) *Voir*, par exemple, ses *Leçons de Stockholm*.

(²) Par exemple, on peut définir les nombres e et π par les relations

$$\pi = 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; \qquad 1 = \int_1^e \frac{dx}{x}.$$

Nous donnons ces exemples simplement à titre d'indication.

3. Il est clair que l'on définit ainsi un nombre limité de nombres : avec ces nombres choisis comme coefficients, on peut former un nombre limité d'intégrales elliptiques de première espèce

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a_0 x^4 + 4 a_1 x^3 + 6 a_2 x^2 + 4 a_3 x + a_4}};$$

et chacune de ces intégrales a seulement deux périodes *principales*, c'est-à-dire périodes primitives de module minimum [1]. Supposons qu'entre plusieurs de ces périodes convenablement choisies, $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_q$, il y ait des relations linéaires à coefficients entiers de la forme

$$(1) \qquad m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + m_3\omega_3 + \ldots + m_q\omega_q = 0.$$

Nous pouvons toujours supposer que, parmi les relations linéaires où figurent effectivement $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_q$, la relation (1) est celle pour laquelle la somme

$$A = m_1^2 + m_2^2 + \ldots + m_q^2$$

a la plus petite valeur. Il y aura ainsi au plus autant de valeurs pour A qu'il y a de manières d'associer les périodes q à q, q étant arbitraire.

Dès lors, il est clair que *le nombre* N *étant donné, il y a un nombre limité de valeurs pour* A : nous désignerons la plus grande d'entre elles par $\varphi(N)$; on aura ainsi

$$(2) \qquad A \leq \varphi(N).$$

Si la fonction $\varphi(N)$ était connue, le problème qui consiste à reconnaître s'il peut exister une relation telle que (1) entre des périodes $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_q$ se trouverait décomposé en un nombre *limité* de problèmes plus simples : *reconnaître si la relation* (1) *est vérifiée, les nombres entiers* $m_1, m_2, \ldots, m_q$ *étant donnés, et les nombres* $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_q$ *étant définis par des conditions transcendantes.*

4. Si, en calculant avec approximation le premier membre de

(1) Voir, par exemple, JORDAN, *Cours d'Analyse*, 2e édition, t. II, p. 338.

la relation (1) on trouve que sa valeur est sûrement différente de zéro, on est certain que la relation (1) n'a pas lieu; il n'y a doute que si l'on trouve une valeur de plus en plus voisine de zéro à mesure que l'on pousse plus loin l'approximation.

Il est bien certain que, si la quantité

$$(3) \qquad m_1\omega_1 + \ldots + m_q\omega_q$$

est différente de zéro, on s'en apercevra sûrement au bout d'un nombre limité d'opérations; mais ce nombre limité ne peut pas être fixé d'avance.

Voici ce que l'on peut dire à ce sujet : considérons toujours les quantités ω, en nombre limité, que nous avons définies, et choisissons de toutes les manières possibles les entiers positifs ou négatifs m_i, tels que N soit inférieur à $\varphi(N)$; nous définissons ainsi un nombre limité de quantités (3); si nous désignons par $\psi(N)$ le module de la plus petite d'entre elles, en excluant celles qui sont nulles, on aura sûrement

$$|m_1\omega_1 + \ldots + m_q\omega_q| \geq \psi(N)$$

dans le cas où la relation (1) n'est pas satisfaite. Donc *la connaissance des deux fonctions $\varphi(N)$ et $\psi(N)$ permettrait de résoudre sûrement le problème qui nous occupe, par un nombre limité d'opérations, fixé d'avance.*

5. Je ne suis malheureusement pas en état de proposer une méthode qui permette d'obtenir ces deux fonctions; de sorte que les remarques précédentes substituent simplement à un problème très difficile un autre problème qui ne paraît pas moins difficile. Mais ce nouveau problème me paraît présenter un très grand intérêt en lui-même et avoir une portée très générale; c'est ce que je voudrais indiquer ici très brièvement, en omettant les généralisations pour ainsi dire illimitées que l'on pourrait ajouter aux considérations précédentes.

6. Lorsque l'on définit un nombre entier déterminé au moyen de nombres entiers en nombre fini et d'opérations arithmétiques, il est toujours possible de fixer d'avance une limite supérieure du nombre défini en fonction de ceux qui servent à le définir: on

peut exprimer ce fait en disant que la *puissance des opérations arithmétiques est connue et limitée*.

Il en est de même pour certains procédés algébriques de nature bien plus compliquée ; par exemple, si un nombre entier est défini comme étant le quotient incomplet de rang déterminé du développement en fraction continue d'un nombre algébrique donné, on sait limiter ce nombre au moyen des données ; à savoir : les coefficients de l'équation qui définit le nombre algébrique, le degré de cette équation et le rang du quotient incomplet.

Ceci peut être étendu, comme je l'ai montré, au cas où l'on adjoint le nombre e au domaine de rationalité [1].

Dans ces divers cas, il est d'ailleurs évident que l'on doit toujours s'arranger pour définir un nombre unique ou tout au moins des nombres en nombre limité ; peu importe, d'ailleurs, le procédé plus ou moins artificiel par lequel cette limitation est obtenue.

Le principe général sur lequel je voudrais attirer l'attention et qui est évident d'après les considérations précédentes, c'est que les divers procédés transcendants par lesquels on peut définir des nombres entiers ont aussi une *puissance limitée* ; c'est ainsi que l'on peut traduire le fait de l'existence de la fonction $\varphi(N)$; il faudrait déterminer cette fonction pour limiter effectivement cette puissance ; c'est là le problème que je tenais à signaler à cause de son caractère très général et de l'importance qu'il me paraît avoir au point de vue des principes.

Sur l'approximation, les uns par les autres, des nombres formant un ensemble dénombrable [2].

1. Étant donné un ensemble dénombrable E de nombres réels, nous ferons correspondre à chaque nombre de l'ensemble un entier positif h que nous appellerons *hauteur* de ce nombre dans E et tel que chaque valeur de h corresponde à un nombre limité de nombres de E. Une telle correspondance peut être obtenue d'une infinité de manières ; dans chaque cas particulier, on devra supposer qu'on a choisi une correspondance *déterminée*. Par exemple, si l'on considère l'ensemble des nombres $\frac{p}{q}$, p et q étant entiers et

---

(1) *Comptes rendus*, t. 128, 6 mars 1899, p. 596. *Voir* plus haut, p. 102.
(2) *Comptes rendus*, t. 136, 2 février 1903, p. 297.

premiers entre eux, on pourra prendre pour h la somme $|p| + |q|$; si l'on considère l'ensemble des nombres algébriques réels, on pourra prendre pour h la somme du degré et des coefficients (entiers sans facteur commun) de l'équation irréductible que vérifie le nombre algébrique.

Désignons par x_1 et x_2 deux nombres de E, par h_1 et h_2 leurs hauteurs; comme il y a un nombre limité de nombres de hauteur h_1 et un nombre limité de nombres de hauteur h_2, il est clair qu'il existe un minimum pour la valeur absolue de $x_1 - x_2$; en d'autres termes, *il existe* une fonction $\varphi(h_1, h_2)$, toujours positive et telle que l'on ait

$$(1) \qquad |x_1 - x_2| > \varphi(h_1, h_2).$$

Je me propose de résumer d'abord quelques recherches, que je publierai prochainement, relatives à la *détermination effective* de la fonction $\varphi(h_1, h_2)$ pour certains ensembles E; j'indiquerai ensuite quel intérêt il me paraîtrait y avoir à la déterminer dans des cas de plus en plus généraux.

2. Considérons d'abord l'ensemble E des nombres algébriques; soient x_1 et x_2 deux éléments de E, de hauteurs h_1 et h_2, $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = 0$, les équations irréductibles vérifiées respectivement par x_1 et x_2. Le résultant R de $f_1(x)$ et de $f_2(x)$ est un nombre entier; sa valeur absolue est au moins égale à 1; d'autre part, R est le produit de $(x_1 - x_2)^2$ par des facteurs dont on peut aisément obtenir une limite supérieure en fonction de h_1 et h_2, car les degrés et les coefficients des polynomes $f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont limités supérieurement en fonction de h_1 et h_2. On obtient ainsi, pour chaque définition de la hauteur, une expression de la fonction $\varphi(h_1, h_2)$.

On arrive aussi à un résultat explicite pour l'ensemble E′ des nombres algébriques obtenus en adjoignant le nombre e au domaine naturel de rationalité; l'ensemble E′ comprend l'ensemble E; il suffit d'employer la méthode que j'ai indiquée dans ma Note du 6 mars 1899.

Les ensembles E et E′ constituent des *corps* algébriques, c'est-à-dire contiennent tous les nombres qui peuvent être algébriquement définis au moyen de leurs éléments; au point de vue des applications, les résultats relatifs à des nombres formant ainsi un

corps, présentent un intérêt particulier, comme on s'en rend facilement compte.

3. Dans les travaux antérieurs sur l'approximation des incommensurables, on supposait que le nombre x_1 appartenait à un ensemble E_1, le nombre x_2 à l'ensemble E_2 des nombres rationnels, et l'on cherchait une limitation asymptotique de $\varphi(h_1, h_2)$ lorsque, h_1 étant fixe, h_2 croissait indéfiniment : tels sont les résultats de Liouville, de M. Maillet, de M. Störmer; dans ma Note précitée, j'ai étudié le cas d'un ensemble E formé des nombres algébriques, mais j'ai supposé aussi x_1 fixe et cherché seulement une limitation asymptotique de $\varphi(h_1, h_2)$; pour les applications, il y a un grand intérêt à se placer au nouveau point de vue que je viens d'indiquer, car une inégalité asymptotique est souvent peu utile lorsque l'on ne sait pas à partir de quelle valeur de la variable elle est vérifiée.

Indépendamment des applications qui peuvent être suggérées par les travaux que je cite à la fin de cette Note, la détermination effective de la fonction $\varphi(h_1, h_2)$, dans des cas de plus en plus étendus, me paraît avoir un certain intérêt au point de vue des principes. Si l'on construit l'analyse en partant de *l'unité*, la définition d'un nombre quelconque exige un certain nombre d'opérations élémentaires, de nature algébrique ou transcendante (une opération transcendante étant, par exemple, celle qui, de a, permet de déduire $\log a$, $\sin a$, $p a$); si l'on considère un ensemble E_1 de nombres obtenus au moyen de certaines opérations, la hauteur h d'un nombre x, telle que nous l'avons définie, est en relation simple avec le nombre d'opérations élémentaires au moyen desquelles on peut définir x; la formule (1) exprime, en quelque sorte, une relation entre ce nombre d'opérations et la densité des nombres x qu'elles permettent de définir.

Signalons, en terminant, qu'il pourrait y avoir parfois intérêt à désigner la *hauteur* par un nombre complexe à plusieurs unités principales; considérons, par exemple, l'ensemble des nombres que l'on déduit de l'unité au moyen : 1° d'opérations algébriques élémentaires; 2° de l'opération log. On pourra désigner par h le nombre d'opérations algébriques, et par k le nombre d'opérations log; la hauteur sera $h + k\omega$ et, dans la formule (1), on remplacera

$\varphi(h_1, h_2)$ par $\varphi(h_1, h_2, k_1, k_2)$. On pourra ainsi obtenir des formules plus précises. Dans les cas où l'on préfère la simplicité à la précision, il sera toujours possible de désigner par H la hauteur de tous les nombres de hauteur $h + k\omega$ et tels que $h + k$ soit égal à H [1].

Sur l'approximation des nombres par des nombres rationnels [2].

1. On sait que, étant donné un nombre réel quelconque α, il existe une infinité de systèmes d'entiers p et q tels que l'on ait

$$\left|\frac{p}{q} - \alpha\right| < \frac{1}{q^2\sqrt{5}}.$$

M. Hurwitz a montré, de plus, que le facteur $\sqrt{5}$ ne peut pas être remplacé par un facteur plus grand, si α est arbitraire. Cette proposition et un théorème que j'ai démontré dans ma Thèse, et qui joue un rôle fondamental dans la théorie de la mesure des ensembles (*voir* mes *Leçons sur la théorie des fonctions*, Chap. III, et la *Thèse* de M. Lebesgue), entraînent la conséquence suivante :

Considérons un intervalle quelconque, par exemple l'intervalle $0 \leq \alpha \leq 1$. *Il est possible de déterminer une infinité de systèmes finis de fractions* $\frac{p}{q}$, *ces systèmes n'ayant pas d'éléments communs, et chacun d'eux ayant la propriété suivante : tout point de l'intervalle donné est intérieur à l'un au moins des intervalles*

$$\frac{p}{q} - \frac{1}{q^2\sqrt{5}}, \qquad \frac{p}{q} + \frac{1}{q^2\sqrt{5}}$$

que l'on peut associer au système considéré [3].

---

(1) Renseignements bibliographiques relatifs à cette Note : ÉMILE BOREL, *Leçons sur la théorie des fonctions*, Chap. II, 1897; *Comptes rendus*, t. 121, p. 933; t. 128, p. 490 et 596; *Acta mathematica : Sur les périodes*, etc., t. 27, p. 213; *Notice sur ses travaux scientifiques*, XXIX; *Leçons sur les fonctions méromorphes*, 1903, p. 101. — EDMOND MAILLET, *Comptes rendus*, 1901 et 1902; *Bulletin de la Société mathématique*, 1902. — CARL STÖRMER, *Bulletin de la Société mathématique*, 1900, et *Acta mathematica : Quelques propriétés*, etc., t. 27, où l'on trouvera quelques autres renseignements.

(2) *Comptes rendus*, 4 mai 1903, t. 136, p. 1054.

(3) La détermination des systèmes irréductibles de cette sorte a été faite par M. Denjoy (*Bulletin de la Société mathématique*, 1911).

Je me suis proposé de démontrer cette proposition directement, ce qui fournit une nouvelle démonstration, extrêmement simple, du théorème de M. Hurwitz et donne, de plus, une *détermination effective* des systèmes dont l'énoncé précédent affirme seulement l'existence. On arrive ainsi au théorème suivant :

Théorème. — *Soient* α *un nombre réel quelconque, A et B des nombres réels vérifiant les relations*

$$1 < A, \qquad B \geq 15A^2.$$

On peut déterminer des entiers p et q tels que l'on ait

$$\left|\frac{p}{q} - \alpha\right| < \frac{1}{q^2\sqrt{5}},$$
$$A \leq q \leq B.$$

2. On doit à Hermite un résultat fondamental relatif à l'approximation simultanée de plusieurs nombres par des fractions de même dénominateur. Si l'on a n nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, on peut déterminer des entiers $p_1, p_2, \ldots, p_n, q$ tels que l'on ait

$$\left|\alpha_i - \frac{p_i}{q}\right| < \frac{A}{q^{a}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

les nombres A et a ne dépendant que de n. Hermite a donné pour a la valeur $\frac{n+1}{n}$ et pour A une valeur qu'il est inutile de rappeler et que M. Minkowski a remplacé par une valeur plus avantageuse. J'ai démontré qu'*il n'est pas possible de prendre pour a une valeur supérieure à celle qu'a indiquée Hermite.*

On peut déduire du théorème d'Hermite une généralisation du résultat énoncé en premier lieu, en utilisant l'extension, à l'espace à n dimensions, du théorème sur la mesure auquel j'ai fait allusion. La possibilité de cette extension (sans modification dans la démonstration que j'avais donnée) a été signalée, pour la première fois, par M. Lebesgue dans sa Thèse ; M. Lebesgue s'est d'ailleurs limité à ce qui était nécessaire aux applications qu'il avait en vue ; aussi n'est-il peut-être pas inutile d'énoncer ici le théorème fondamental auquel on parvient, sous la forme la plus générale.

Théorème. — *Soient, dans l'espace à n dimensions, une infinité dénombrable d'ensembles fermés (c'est-à-dire tels que*

chacun contienne son dérivé) $E_1, E_2, \ldots, E_p, \ldots$ *et un ensemble quelconque* E *tel que tout point de* E *soit intérieur à l'un des* E_i. *On peut, dès lors, choisir parmi les* E_i *un nombre limité d'ensembles tels que tout point de* E *soit intérieur à l'un d'eux* (1).

La démonstration peut être calquée sur celle qui est donnée dans mes *Leçons sur la théorie des fonctions*, p. 42-43.

Les résultats précédents, joints à quelques autres, sont exposés avec plus de détails dans un Mémoire qui paraîtra prochainement dans le *Journal de M. Jordan*. Les méthodes suivies me paraissent d'ailleurs pouvoir conduire à bien d'autres résultats dans la Théorie des nombres et l'Algèbre.

Sur l'approximation des nombres réels par les nombres quadratiques (2).

Les nombres quadratiques sont les nombres de la forme

$$\frac{a \pm \sqrt{b}}{c},$$

a, b, c désignant des nombres entiers dont les deux derniers peuvent être supposés positifs. Pour rechercher les nombres quadratiques différant peu d'un nombre donné x, il revient au même de rechercher les nombres de la forme $a \pm \sqrt{b}$ qui diffèrent peu de cx. Si l'on se borne d'abord aux nombres de la forme $a + \sqrt{b}$, on voit que, a désignant un entier positif ou négatif, les nombres $\sqrt{b}$ et cx écrits dans le système décimal ont des parties décimales très peu différentes.

On est ainsi conduit à ranger les nombres tels que $\sqrt{b}$, c'est-à-dire *les racines carrées des nombres entiers*, d'après l'ordre de gran-

(1) M. Lebesgue a remarqué que l'hypothèse que les ensembles donnés sont en infinité *dénombrable* n'est pas nécessaire. Cette remarque, utile dans certaines applications, n'intervient pas dans mes recherches actuelles.

(2) *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXXI, 1903 ; on y trouvera les Tableaux numériques complets dont un extrait seul est reproduit ici.

deur de leur partie décimale. Ce travail ne présente aucune difficulté et est même très rapide, si l'on fait usage d'une Table de racines carrées ; j'ai utilisé celle de Barlow.

Je publie, sans commentaires, la liste des racines des 500 premiers nombres (les carrés parfaits exclus), rangés par ordre de grandeur des parties décimales [1] ; la disposition même que j'ai adoptée suggérera des remarques qu'il est inutile d'énoncer. Signalons cependant l'existence de lacunes au voisinage des fractions irréductibles *simples*, lacunes d'autant plus étendues que ces fractions sont plus simples.

Parmi les applications d'une telle Table, on peut citer la recherche très aisée de quadratures approchées du cercle et de rectifications approchées de la circonférence. Si l'on cherche à insérer dans la Table les multiples de π, on trouve que 8π y est très voisin de $\sqrt{229}$; on a

$$8\pi = 25{,}132\,741\,228\ldots,$$

$$\sqrt{229} = 15{,}132\,746\,0\ldots.$$

On obtient

$$\frac{10 + \sqrt{229}}{8} = 3{,}141\,593\,2\ldots,$$

$$\pi = 3{,}141\,592\,6\ldots.$$

L'erreur commise en prenant pour π la valeur $\frac{10 + \sqrt{229}}{8}$ est donc environ d'un demi-millionième. Si l'on remarque que l'on a

$$229 = 225 + 4 = 15^2 + 2^2,$$

on obtient aisément une construction géométrique très simple de la valeur approchée considérée, qui peut s'écrire

$$\frac{5}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{15}{2}\right)^2 + 1}.$$

Je me propose de revenir sur la question d'approximation des nombres réels par des nombres quadratiques ; je me contente de signaler ici, en terminant, une difficulté qui se présente lorsqu'on veut définir les nombres quadratiques, *en général*, difficulté analogue à celle qui résulte de la double définition des courbes algé-

---

[1] On n'a reproduit ici que deux pages du tableau correspondant au cas où les trois premiers chiffres décimaux forment un nombre compris entre 160 et 239.

briques, en coordonnées ponctuelles et tangentielles et qui se présente dans bien d'autres questions.

Comme nous l'avons dit, tous les nombres quadratiques sont définis par la formule

$$x = \frac{a + \sqrt{b}}{c}, \tag{1}$$

où a, b, c sont des entiers; le nombre x vérifie l'équation du second degré

$$c^2x^2 - 2acx + a^2 - b = 0. \tag{2}$$

Il est clair que si a, b, c sont quelconques, les coefficients de cette équation n'auront pas, *en général*, de facteur commun; si on les désigne par A, B, C, on voit que le nombre x défini par la formule (1) vérifie une équation de la forme

$$Ax^2 + Bx + C = 0, \tag{3}$$

dont les coefficients A, B, C sont d'un ordre de grandeur qui est le *carré* de l'ordre de grandeur de a, $\sqrt{b}$, c.

Si, inversement, on se donne l'équation (3), on en déduit

$$x = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{a' + \sqrt{b'}}{c'}, \tag{4}$$

c'est-à-dire une expression analogue à (1), mais dans laquelle a', $\sqrt{b'}$ et c' sont de l'ordre de grandeur de A, B, C. Dans le cas où l'équation (3) est identique à l'équation (2), l'expression (4) ne devient identique à (1) qu'après la suppression du facteur $2c$ commun au numérateur et au dénominateur; mais si A, B, C sont quelconques il n'y a pas, *en général*, de facteur commun au numérateur et au dénominateur de l'expression (4).

Il est clair qu'il n'y a là aucun paradoxe, mais simplement la nécessité de définir nettement, dans chaque recherche particulière, ce que l'on entend par une irrationnelle quadratique *générale*; on peut la considérer comme définie par la formule (1) et regarder comme *cas particulier* le cas où, dans l'équation (2), les coefficients ont des facteurs communs; ou, au contraire, la regarder comme définie par l'équation (3) et regarder comme *cas particulier* le cas où la formule (4) peut se simplifier par la suppression d'un facteur commun à A et B, figurant au carré dans $B^2 - 4AC$.

160 à 199.

$\sqrt{10} = 3.1622777$

$\sqrt{38} = 6.1644140$

$\sqrt{84} = 9.1651514$ $\sqrt{148} = 12.1655251$ $\sqrt{230} = 15.1657509$ $\sqrt{330} = 18.1659021$

$\sqrt{448} = 21.1660105$

$\sqrt{407} = 20.1742410$

$\sqrt{295} = 17.1755640$

$\sqrt{201} = 14.1774469$

$\sqrt{125} = 11.1803399$

$\sqrt{492} = 22.1810730$

$\sqrt{368} = 19.1833261$

$\sqrt{67} = 8.1853528$

$\sqrt{262} = 16.1864141$

$\sqrt{449} = 21.1896201$

$\sqrt{174} = 13.1909060$

$\sqrt{331} = 18.1934054$

$\sqrt{27} = 5.1961524$

$\sqrt{104} = 10.1980390$ $\sqrt{231} = 15.1986842$

$\sqrt{408} = 20.1990099$

200 à 239.

$\sqrt{493} = 22.2036033$
$\sqrt{296} = 17.2046505$

$\sqrt{149} = 12.2065556$

$\sqrt{369} = 19.2093727$

$\sqrt{52} = 7.2111026$

$\sqrt{202} = 14.2126704$
$\sqrt{450} = 21.2132034$

$\sqrt{263} = 16.2172747$

$\sqrt{85} = 9.2195445$

$\sqrt{332} = 18.2208672$

$\sqrt{409} = 20.2237484$

$\sqrt{126} = 11.2249722$

$\sqrt{494} = 22.2261108$

$\sqrt{175} = 13.2287566$

$\sqrt{232} = 15.2315462$

$\sqrt{297} = 17.2336879$

$\sqrt{370} = 19.2353841$
$\sqrt{451} = 21.2367606$

$\sqrt{5} = 2.2360680$

CHAPITRE IV.

LES FONCTIONS DE VARIABLE COMPLEXE EN GÉNÉRAL ET LES FONCTIONS PARTICULIÈRES.

Généralités.

Depuis les immortelles découvertes de Cauchy, la théorie des fonctions d'une variable complexe est devenue le centre des mathématiques, centre vers lequel convergent tous les efforts, même en apparence dispersés, centre d'où partent les méthodes précieuses qui, comme de larges faisceaux lumineux, éclairent d'une clarté nouvelle les parties les plus diverses des mathématiques. Qu'il s'agisse de Géométrie, de Mécanique, de Physique mathématique, il n'est pas une branche de la science appliquée où les variables complexes ne s'introduisent et ne prennent rapidement leur place, c'est-à-dire la première. Il suffit, pour s'en assurer, de relire les admirables *Leçons sur la théorie des surfaces*, où Gaston Darboux a résumé l'essentiel de l'effort des géomètres du XIXe siècle, de songer aux travaux d'Hermite sur la théorie des nombres, à la théorie de l'équation du cinquième degré. Mais, l'exemple le plus frappant est peut-être le renouvellement de la physique moderne par la théorie de la relativité, qui n'aurait certainement pas pris aussi rapidement sa forme sans la conception de Minkowski faisant du temps une coordonnée imaginaire.

Dans les applications les plus élémentaires de l'électricité industrielle, on sait de quel secours est l'emploi de la variable complexe pour les calculs relatifs aux courants alternatifs.

La prépondérance des variables complexes ne doit pas nous faire négliger, bien entendu, les autres branches des mathématiques; certaines recherches sur les variables réelles sont indispensables pour éclaircir les notions même de domaine et d'opération fonc-

tionnelle. La théorie des équations intégrales, le calcul fonctionnel (**18**, **19**, **20**) font grand usage des variables réelles (*voir* aussi **21**); mais on peut penser que l'introduction systématique des variables complexes introduira, là comme ailleurs, plus d'ordre et plus d'harmonie.

Les fonctions d'une variable complexe donnent, plus peut-être que les fonctions de variable réelle, l'impression d'être vivantes; d'un rameau, ou même d'un germe unique, elles s'étendent, embrassent de leurs ramifications le plan tout entier, s'enroulent autour de leurs singularités et finissent par constituer un être compliqué dont toutes les parties sont solidaires les unes des autres. Il faudrait citer ici presque tous les Volumes de cette collection; je dois me contenter de publier sans commentaires quelques Notes, qui les complètent ou les précisent sur quelques points.

Sur l'interpolation [1].

On sait que, pour former une fonction entière $f(z)$, qui, pour $z = a_1, a_2, \ldots$, prenne les valeurs $c_1, c_2, \ldots$, on calcule la fonction entière $\varphi(z)$ qui s'annule pour $z = a_1, a_2, \ldots$, et l'on a

$$(1) \qquad f(z) = \sum \frac{c_n \varphi(z)}{(z - a_n)\varphi'(a_n)}.$$

La seule difficulté est relative à la convergence de la série. Dans une circonstance analogue, j'ai indiqué (Thèse, p. 36) comment on peut rendre la série convergente en remplaçant $\varphi(z)$ par $\varphi(z)\theta(z)$; je voudrais présenter sur ce point quelques observations.

Supposons que la fonction $\varphi(z)$ admette pour zéros les seuls

---

[1] *Comptes rendus*, t. 124, 29 mars 1897, p. 673. Cette Note laisse en suspens de nombreuses questions; en particulier, la détermination de la fonction $\theta(x)$, fort aisée si les a_n sont réels, l'est moins s'ils sont quelconques; la méthode indiquée ramène alors simplement un problème d'égalités, $f(a_n) = c_n$, à un problème d'inégalités $|\theta(a_n)| > A_n$, les A_n étant certaines constantes positives.

Pendant la correction des épreuves de ce livre, j'ai connaissance d'un intéressant Mémoire de M. Yoshimoto Okada : *On the representations of Functions by the Formulas of Interpolation* (*The Tôhoku Mathematical Journal*, t. XX, décembre 1921), où l'on trouvera en outre des renseignements bibliographiques.

points $a_1, a_2, \ldots$; supposons de plus que, parmi les fonctions qui admettent tous ces zéros (et qui diffèrent par un facteur exponentiel), *ce soit celle qui croît le moins rapidement* [1]. Supposons enfin que les c_n soient tels que la série

$$(2) \qquad \sum \left| \frac{c_n}{a_n \varphi'(a_n)} \right|$$

soit convergente. Dans ces conditions, la fonction $f(z)$ est *déterminée* si, aux conditions données, on ajoute celle-ci : *on veut que* $f(z)$ *soit*, parmi les fonctions prenant la valeur c_n pour $z = a_n$, *celle qui croît le moins rapidement* [2]. Ainsi nous voyons que le problème *indéterminé* de l'interpolation peut devenir *déterminé* par l'adjonction d'une condition supplémentaire d'inégalité : ceci est analogue à ce que l'on sait dans le cas des polynomes. Mais voici la circonstance qui ne pouvait se présenter dans ce dernier cas. Regardant les a_n comme donnés, supposons que les c_n soient tels que la série (2) soit divergente; nous serons obligés, alors, pour obtenir *une* fonction $f(z)$, de remplacer $\varphi(z)$ par $\varphi(z)\theta(z)$, $\theta(z)$ étant un polynome ou une fonction entière suivant les cas; l'expression générale des fonctions $f(z)$ pourra alors s'écrire

$$f(z) = \sum \frac{c_n \varphi(z)\theta(z)}{(z - a_n)\varphi'(a_n)\theta(a_n)} + \varphi(z) H(z),$$

$H(z)$ étant une fonction entière arbitraire (pouvant se réduire à un polynome) et ici, à cause du facteur $\theta(z)$ qui figure dans le premier terme, la fonction particulière $f(z)$, que l'on obtient en faisant $H(z) = 0$, ne se distingue pas des autres au point de vue de la croissance, ou tout au moins une telle distinction n'apparaît pas simplement.

Ainsi, au premier fait que nous avons énoncé : *on peut, dans*

---

(1) Cette hypothèse, pour être précisée, demanderait des recherches sérieuses, dans le cas le plus général. Mais il ne se présente pas de difficulté dans les applications que nous indiquons et qui sont actuellement notre but principal. On pourrait aussi comparer la fonction $\varphi(z)$ à celles que l'on obtient en la multipliant par un facteur non exponentiel.

(2) *Voir* la Note précédente. Il serait préférable de dire que $f(z)$ est assujettie à croître *de la même manière* que $\frac{1}{z}\varphi(z)$).

certains cas, rendre déterminé le problème indéterminé de l'interpolation au moyen d'une condition d'inégalité, nous devons ajouter celui-ci, non moins important : *cela n'est possible que si les données elles-mêmes vérifient des conditions du même genre*.

Or, ces deux remarques paraissent constituer une loi très générale et dont on connaît déjà de nombreux exemples, sans cependant les avoir reliés entre eux. Par exemple, trouver une fonction de variable réelle admettant des dérivées données pour $z = 0$ est un problème indéterminé; on peut le déterminer en ajoutant que la fonction est analytique et régulière dans le voisinage de $z = 0$, mais seulement dans le cas où les valeurs données des dérivées rendent convergente la série de Taylor.

J'indiquerai aussi le *problème des moments*, traité par Stieltjes dans son beau Mémoire sur les fractions continues (*Annales de Toulouse*, 1894); ici l'inégalité qui détermine, *dans certains cas*, le problème, est l'hypothèse que les masses sont positives. Ce problème de Stieltjes est d'ailleurs rendu particulièrement intéressant par le fait qu'il permet de jeter une lumière nouvelle sur le rôle de certaines séries divergentes : c'est là un point sur lequel j'aurai sans doute l'occasion de revenir [1].

Enfin, un autre exemple bien connu nous est donné par les séries de Fourier : la connaissance de leurs coefficients permet de déterminer la fonction, *si l'on sait que celle-ci est développable*, à condition, bien entendu, que les coefficients rendent la série convergente. Le cas où elle serait divergente, soit en certains points, soit en tous les points, n'a pas été, je crois, examiné jusqu'ici.

Je vais indiquer brièvement, en choisissant, pour fixer les idées, ce dernier exemple, la relation qu'il y a entre ces remarques et les propriétés des fonctions entières. Posons

$$f(z) = \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x)\, e^{izx}\, dx.$$

et supposons que la fonction $\varphi(x)$ satisfasse aux conditions de Dirichlet. Dès lors, si l'on connaît les valeurs de $f(z)$ pour $z = 0$,

(¹) Voir mes *Leçons sur les séries divergentes* (3).

$\pm 1, \pm 2, \ldots$, la fonction $\varphi(x)$ est déterminée et par suite la fonction entière $f(z)$ est *connue sans ambiguïté*. On remarquera qu'il résulte de l'expression de $f(z)$ sous forme d'intégrale que c'est une fonction à croissance moins rapide que $\sin\pi z$, mais à croissance plus rapide que $\sin\pi(1-\varepsilon)z$, quelque petit que soit ε. Tout cela est en parfait accord avec les remarques faites au début sur les fonctions entières.

Je pense que ces exemples, malgré le peu de développement que je puis leur donner ici, auront suffi pour montrer l'intérêt qu'il peut y avoir à rapprocher de la théorie des zéros des fonctions entières et du problème connexe de l'interpolation, les nombreuses questions dans lesquelles on se propose de déterminer une fonction par des conditions discrètes quelconques. J'espère revenir prochainement sur ce sujet dans un Mémoire plus étendu.

Sur la recherche des singularités d'une fonction définie par un développement de Taylor (1).

Le problème énoncé dans notre titre fut, croyons-nous, abordé *directement* pour la première fois par M. Hadamard, dans sa Thèse (2). Malgré la beauté des résultats obtenus, ce travail resta d'abord isolé : quelques années plus tard, M. Fabry reprit et développa la méthode de M. Hadamard, dans une série de savants Mémoires (3). Plus récemment, M. Leau et M. Le Roy ont, chacun de son côté, étudié la même question (4), par des méthodes qui se rattachent à la fois à mes recherches sur les séries divergentes (5) et à l'emploi de la représentation conforme, d'après M. E. Lindelöf (6).

Mon but n'est pas d'aborder à mon tour un terrain où, comme on voit, divers géomètres se sont déjà engagés avec succès et continue-

(1) *Comptes rendus*, t. 127, 12 décembre 1898, p. 1001.

(2) *Journal de Mathématiques*, 1892.

(3) *Annales de l'École Normale*, 1896. — *Acta mathematica*, t. XXII. — *Journal de Mathématiques*, 1898.

(4) *Comptes rendus*, novembre et décembre 1898.

(5) *Journal de Mathématiques*, 1896, et *Comptes rendus*, même année, *passim*. — *Acta mathematica*, t. XXI.

(6) *Comptes rendus*, 1898. — *Acta Societatis Fennicæ*, 1898.

ront sans doute à obtenir d'importants résultats par des méthodes variées. Je voudrais seulement présenter quelques réflexions générales sur certains de ces résultats [1] obtenus en étudiant la nature du $n^{\text{ième}}$ coefficient de la série de Taylor, considéré comme fonction analytique de n.

Considérons la série $f(z) = \Sigma \alpha_n z^n$ et, pour plus de netteté, supposons, non seulement que le rayon de convergence est égal à *un*, mais encore que la série $\Sigma|\alpha_n|$ est convergente. On peut, d'une infinité de manières, déterminer une fonction analytique $\psi(x)$, telle que l'on ait $\alpha_n = \psi(n)$. *L'étude des points singuliers de $f(z)$, autres que $z=1$ et $z=\infty$, ne dépend que de la manière dont $\psi(x)$ se comporte à l'infini.* C'est une conséquence d'un résultat obtenu, dans les Mémoires cités, pour le cas où $\psi(x)$ est régulière à l'infini. On pourra même ajouter qu'il suffit d'étudier $\psi(x)$ dans un certain voisinage de l'axe réel positif.

On peut, en particulier, prendre pour $\psi(x)$ une fonction entière, et cela d'une infinité de manières. Nous poserons, pour fixer les idées,

$$\psi(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi} \sum \frac{(-1)^n \alpha_n}{x-n}.$$

Cette fonction entière est, *en général, d'ordre* [2] égal à *un*. M. Leau a énoncé un résultat intéressant dans le cas où cet ordre est plus petit que un.

Désignons par (C) un contour entourant le point $z=0$, et à l'intérieur duquel $f(z)$ est holomorphe. On a

$$\alpha_n = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(u)\,du}{u^{n+1}},$$

d'où

$$\psi(x) = \frac{\sin \pi x}{2i\pi^2}\int_C f(u)\,\theta(x,u)\,du,$$

en posant

$$\theta(x,u) = \sum \frac{(-1)^n}{(x-n)u^{n+1}}.$$

---

[1] Voir les Mémoires cités de MM. Fabry, Leau, Le Roy, Lindelöf.

[2] J'appelle, ici, *ordre* ce que j'ai appelé *ordre apparent* dans mon Mémoire *Sur les zéros des fonctions entières* (*Acta mathematica*, t. XX). Il n'y a pas intérêt ici à le distinguer de l'*ordre réel*, auquel il est égal, sauf dans le cas d'exception de M. Picard.

La fonction analytique $\theta(x, u)$ s'exprime aisément par une intégrale définie ; il y aurait lieu d'en faire une étude approfondie, en la regardant comme fonction *des deux variables* x et u.

Désignons maintenant, pour un instant, par $\psi(x)$ une fonction régulière pour x positif, et tendant, ainsi que sa dérivée, *vers une valeur déterminée*, lorsque x tend vers l'infini *à l'intérieur d'une certaine aire*. Désignons par Γ le contour qui limite cette aire, supposé renfermer à son intérieur toutes les valeurs réelles de x. On a évidemment

$$\alpha_n = \psi(n) = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{\psi(u)\,du}{u-n};$$

et, par suite,

$$f(z) = \sum \alpha_n z^n = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{\psi(u)}{z}\,\theta\left(u, \frac{1}{z}\right) du,$$

la fonction θ ayant la signification déjà donnée (¹).

On voit quelle relation étroite est ainsi établie entre l'étude des singularités de $f(z)$ dans tout le plan et l'étude du point singulier essentiel unique de $\psi(x)$. On peut dire que ce dernier condense en lui seul toutes les singularités de $f(z)$; c'est un résultat analogue à celui que nous avions obtenu par l'introduction de la *fonction entière associée* (*loc. cit.*).

Nous ne pouvons indiquer toutes les applications qui se présenteraient ; signalons celles qui ont trait à un théorème de M. Hadamard, sur les séries de Taylor (*Comptes rendus*, mars 1897). Ce théorème, que j'ai complété dans une Note récente (*Comptes rendus*, novembre 1898), établit une relation entre les singularités des séries $\Sigma a_n z^n$, $\Sigma b_n z^n$, $\Sigma a_n b_n z^n$. Or, pour la fonction entière $f(x)$ correspondant à cette dernière série, on peut visiblement prendre le *produit* des fonctions entières correspondant aux deux premières. On sait donc ce que deviennent les singularités des séries de Taylor, lorsque l'on combine les fonctions entières correspondantes par voie d'addition ou de multiplication.

(¹) On peut déduire de cette formule des résultats analogues à ceux qui ont été indiqués par M. Le Roy au début de sa Note de la dernière séance, mais plus généraux.

Sur les fonctions de genre infini (¹).

On sait que, si l'on désigne par $M(r)$ le maximum du module d'une fonction entière pour $|z| = r$, et par $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ les modules des zéros de la fonction, on a, quels que soient n et r, l'inégalité (²)

$$(1) \qquad \frac{1}{r_1 r_2 \ldots r_n} \leqq \frac{M(r)}{r^n}.$$

Je me propose d'indiquer quelques conséquences de cette inégalité, dans le cas où le nombre n des zéros dont le module est inférieur à r est une fonction $\theta(r)$ qui croît très rapidement avec r.

Le nombre des zéros compris entre $\theta(r-t)$ et $\theta(r-t+dt)$ est évidemment $\theta'(r-t)\,dt$; on a donc, en faisant varier t de zéro à r,

$$\frac{r^n}{r_1 r_2 \ldots r_n} = \prod \left(\frac{r}{r-t}\right)^{\theta'(r-t)\,dt},$$

c'est-à-dire

$$M(r) \geqq \prod \left(\frac{1}{1-\frac{t}{r}}\right)^{\theta'(r-t)\,dt} = e^{-\int_0^r \log\left(1-\frac{t}{r}\right)\theta'(r-t)\,dt}.$$

Or, on a

$$(2) \qquad -\log\left(1-\frac{t}{r}\right) = \frac{t}{r} + \frac{t^2}{2r^2} + \ldots.$$

Dès lors, posons

$$\int_0^r \theta(r)\,dr = \theta_1(r); \qquad \int_0^r \theta_1(r)\,dr = \theta_2(r), \qquad \ldots,$$

il vient

$$(3) \qquad \log M(r) \geqq \frac{1}{r}\theta_1(r) + \frac{1}{r^2}\theta_2(r) + \frac{2}{r^3}\theta_3(r) + \ldots$$

en n'écrivant pas les termes qui correspondent à la limite supérieure $t = r$, et qui sont négligeables.

(¹) *Comptes rendus*, t. 134, 9 juin 1902, p. 1345.

(²) JENSEN, *Acta math.*, t. XXII. — PETERSEN, *Acta math.*, t. XXIII. — ERNST LINDELÖF, *Acta Societatis Scientiarum Fennicae*, t. XXXI, p. 14. On suppose que la fonction entière considérée est égale à l'unité pour $z = 0$.

La fonction $\theta(r)$ étant à croissance très rapide, les fonctions $\theta_1(r)$, $\theta_2(r)$, ... croissent bien moins vite [1] que $\theta(r)$. Les premiers termes de la série écrite dans le second membre de (3) décroissent donc très rapidement, et comme, d'autre part, on peut arrêter ce développement, d'après (2), à un terme quelconque, avec un facteur correctif sans importance, on peut écrire

$$(4) \qquad \log M(r) = \frac{\theta_1(r)}{r}(1+\varepsilon),$$

ε tendant vers zéro lorsque r augmente indéfiniment. On peut ajouter que l'on a

$$(5) \qquad \varepsilon \sim \frac{\theta_2(r)}{\theta_1(r)},$$

d'où l'on conclut, en général, que ε est de l'ordre de grandeur de $\frac{1}{\log\theta(r)}$.

On peut écrire aussi, *si l'on suppose les fonctions à croissance régulière*,

$$(6) \qquad \theta(r) = \frac{d}{dr}[r \log M(r)](1-\varepsilon') = (1-\varepsilon'')r\frac{M'(r)}{M(r)},$$

ε', ε'' vérifiant toujours la relation (6).

La relation qu'il y a entre l'ordre de grandeur de la fonction et la densité de ses zéros se trouve ainsi établie, à la fois, avec une grande simplicité et une grande précision; elle s'exprime par les relations (4) et (5); les réciproques s'établiraient d'une manière analogue (*voir* mes *Leçons sur les fonctions entières* et le *Mémoire* cité de M. Lindelöf).

J'ai tenu surtout à exposer ici la méthode différentielle employée, qui me paraît pouvoir rendre de grands services dans l'étude des fonctions de genre infini.

---

[1] Par exemple, si $\theta(r) = e^{e^r}$, on a

$$\theta_1(r) < e^{-r}\theta(r),$$
$$\theta_2(r) < e^{-r}\theta_1(r).$$

Sur la détermination de classes singulières de séries de Taylor (¹).

1. Nous dirons que deux séries entières en z *appartiennent à la même classe* lorsque les puissances de z, dont les coefficients sont nuls, sont les mêmes dans les deux séries. Cette définition est un cas particulier de la définition des classes de polynomes (²). Une classe de séries entières peut être définie par une suite illimitée d'entiers positifs croissants : $n_1, n_2, \ldots, n_i, \ldots$, qui sont les exposants des puissances de z dont les coefficients ne sont pas nuls.

Nous dirons qu'une classe de séries est *singulière* lorsque *toutes* les séries de cette classe *admettent leur cercle de convergence comme ligne singulière* (ou, plus brièvement, *sont singulières*). Le but de cette Note est d'indiquer un cas très étendu dans lequel on peut affirmer qu'une classe est singulière (³).

2. Nous donnerons le nom de *sous-classe* à l'ensemble des séries d'une classe telles que *les modules* de leurs coefficients vérifient certaines inégalités (les arguments restant arbitraires). La remarque suivante est fondamentale : *dans toute sous-classe, il y a une infinité de séries singulières*. Cette remarque se démontre comme la proposition connue : une série de Taylor admet, *en général*, son cercle de convergence comme coupure.

Nous dirons qu'une sous-classe est *impropre* lorsque les inégalités qui la définissent ont la conséquence suivante : *toute* série de la sous-classe est la somme d'une série appartenant à une classe moins étendue [ayant plus de coefficients nuls (⁴)] et d'une série ayant un rayon de convergence plus grand.

(¹) *Comptes rendus*, t. 137, 2 novembre 1903, p. 695.

(²) *Voir* mon Mémoire : *Sur les séries de polynomes et de fractions rationnelles* (*Acta mathematica*, t. XXIV).

(³) Le résultat le plus étendu obtenu jusqu'ici, à notre connaissance, est dû à M. Fabry : *une classe est singulière si la différence $n_{i+1} - n_i$ augmente indéfiniment avec i*. Voir, pour l'historique de la question, et pour tous les renseignements bibliographiques relatifs à notre Note, le remarquable Livre de M. Hadamard : *La série de Taylor et son prolongement analytique*.

(⁴) Il est clair que l'on entend par là qu'il y a *une infinité* de coefficients qui sont nuls; s'il n'y en avait qu'un nombre limité, la différence des deux séries serait un polynome.

3. THÉORÈME I. — *Pour qu'une classe soit singulière, il suffit que cette classe renferme une sous-classe propre S ayant la propriété suivante : une série arbitraire de cette sous-classe S étant donnée, il est possible, sans changer son cercle de convergence, de la compléter de manière qu'elle n'admette plus sur ce cercle qu'un nombre limité de points singuliers.* Par définition, *compléter une série* c'est la remplacer par une autre série dans laquelle les puissances de la variable figurant effectivement dans la série donnée ont les mêmes coefficients que dans cette série donnée, les autres coefficients étant quelconques.

Soit $\varphi(z)$ une série de la classe considérée; désignons par $\psi(z)$ une série quelconque de la sous-classe S et posons

$$\varphi(z) = \Sigma a_i z^{n_i},$$
$$\psi(z) = \Sigma b_i z^{n_i},$$
$$\theta(z) = \Sigma a_i b_i z^{n_i}.$$

Si nous supposons que, les a_i étant fixes, les b_i soient assujettis aux inégalités qui définissent la sous-classe S, la fonction $\theta(z)$ appartient à une autre sous-classe S'; il est donc possible de choisir les b_i de manière que la série $\theta(z)$ soit singulière et que le rayon de convergence de $\theta(z)$ soit égal au produit (¹) des rayons de convergence de $\varphi(z)$ et de $\psi(z)$. Les b_i étant ainsi choisis, il est possible, par hypothèse, de *compléter* la série $\psi(z)$ de manière à obtenir une série $\Psi(z)$ ayant le même cercle de convergence que $\psi(z)$ et n'admettant sur ce cercle que des points singuliers isolés. Il est manifeste que chaque coefficient de $\theta(z)$ est égal au produit des deux coefficients correspondants de $\varphi(z)$ et de $\Psi(z)$; de plus, le rayon de convergence de $\theta(z)$ est égal au produit des rayons de convergence de ces deux séries; dans ces conditions, on conclut d'un théorème bien connu de M. Hadamard que, si $\varphi(z)$ n'était pas singulière, $\theta(z)$ ne le serait pas. Le théorème I est donc démontré.

4. THÉORÈME II. — *Pour qu'une classe définie par les entiers*

(¹) C'est ici qu'intervient l'hypothèse que la sous-classe S est *propre*; la sous-classe S' peut être impropre.

$n_1, n_2, \ldots, n_i, \ldots$ soit singulière, il suffit qu'en posant

$$\theta(z) = \Pi\left(1 - \frac{z^2}{n_i^2}\right),$$

la fonction entière (¹) *$\theta(z)$ soit telle que le maximum $M(r)$ de son module pour $|z| = r$ croisse moins vite à l'infini que $e^{\varepsilon r}$, quelque petit que soit le nombre positif ε.*

Soit, en effet, $\varphi(z)$ une fonction de la classe considérée, définie par la formule écrite plus haut ; nous supposerons que $\varphi(z)$ a pour rayon de convergence l'unité et appartient à la sous-classe définie par les inégalités

$$|b_i| < (\log n_i)^2.$$

Dès lors, si nous posons

$$\varpi(z) = \theta(z) \sum \frac{b_i}{(z - n_i)\theta'(n_i)},$$

nous pourrons affirmer que la série du second membre converge et que le maximum $M_1(r)$ du module de $\varpi(z)$ croît moins vite que $e^{\varepsilon r}$, quel que soit ε ; donc la série

$$\Psi(z) = \Sigma\, \varpi(m) z^m$$

n'admet (²) sur le cercle de convergence que le point singulier -1 : cette série $\Psi(z)$ n'est autre que la série $\varphi(z)$ complétée, avec conservation du rayon de convergence ; la condition du théorème I est donc bien remplie.

5. On verrait aisément que le théorème II entraîne la conséquence suivante (³) : *pour qu'une classe soit singulière, il suffit que le rapport $\frac{n_i}{i}$ augmente indéfiniment avec i.*

(¹) Au lieu de la fonction entière $\theta(z)$, on pourrait introduire beaucoup d'autres fonctions entières admettant les zéros $n_1, n_2, \ldots, n_i, \ldots$ mais il semble que celle que nous introduisons donne lieu à des applications plus simples.

(²) Ce résultat est dû à M. Leau (*Journal de Mathématiques*, 1899, p. 365). Il a été retrouvé par M. Georg Faber : *Ueber Reihenentwickelungen analytischer Functionen* (*Inaugural Dissertation*, Munich, 20 avril 1902), travail qui renferme d'ailleurs d'autres résultats nouveaux et intéressants.

(³) Cet énoncé ne fait peut-être pas connaître le cas le plus étendu dans lequel

Sur l'étude asymptotique des fonctions méromorphes (1).

Dans la remarquable Thèse qu'il a récemment soutenue (2), M. Pierre Boutroux a développé d'intéressantes applications d'une méthode dont il avait antérieurement indiqué le principe (3). Cette méthode n'est pas sans analogie avec celle à laquelle j'ai donné le nom de *méthode d'exclusion*; mais elle est loin d'en constituer une extension banale et facile; elle s'en distingue par l'introduction d'un principe entièrement nouveau. Je voudrais indiquer un théorème auquel conduit cette méthode de M. Pierre Boutroux, que j'appellerai *méthode d'exclusion généralisée*.

Je rappelle d'abord en quoi consiste la méthode d'exclusion, à laquelle j'ai été conduit par l'étude des fonctions analytiques à l'intérieur d'un espace lacunaire.

Partant des singularités des fonctions étudiées, on entoure chacune d'elles d'un domaine qui sera regardé comme *exclu* du plan; le principe de la méthode consiste dans l'évaluation des dimensions linéaires et superficielles de ces domaines, d'où l'on conclut l'existence d'aires non exclues et de lignes dont aucun point n'est exclu. La première application de cette méthode à la théorie des fonctions entières a consisté dans l'extension d'un théorème important de M. Hadamard sur le module minimum d'une fonction entière; cette extension, qui précise les valeurs des intervalles dans lesquels on peut choisir le rayon d'un cercle sur lequel la fonction n'est pas inférieure au minimum fixé, élargit beaucoup le champ des

---

une classe est singulière; il suffit peut-être que le rapport $\frac{n_i}{i}$ prenne des valeurs dépassant tout nombre donné d'avance, ce qui n'exige pas que ce rapport augmente indéfiniment; mais c'est là un cas très singulier, au point de vue des applications.

Depuis que cette Note a été publiée pour la première fois, M. Fabry a démontré qu'il suffit pour qu'une classe soit singulière que la différence $n_{i+1} - n_i$ augmente indéfiniment. Malgré la beauté et la généralité de ce résultat, il ne m'a pas semblé que les méthodes indiquées dans cette Note soient dépourvues de tout intérêt.

(1) *Comptes rendus*, t. 138, 11 janvier 1904, p. 68.

(2) *Sur quelques propriétés des fonctions entières* (*Thèse* soutenue le 14 décembre 1903, à la Sorbonne). Ce Mémoire paraîtra prochainement dans les *Acta mathematica*.

(3) *Comptes rendus*, [illegible] janvier 1903.

applications du théorème de M. Hadamard, tout en donnant une démonstration très simple, susceptible de généralisations diverses. En fait, de nombreuses applications, qu'il serait trop long d'énumérer, ont été faites de la méthode à la théorie des fonctions entières et méromorphes.

On peut diviser ces applications en deux catégories, suivant que l'on y considère *simultanément* des domaines exclus en nombre *fini* ou *infini*. Pour les applications de la première catégorie, il suffit d'utiliser les propriétés fondamentales des notions de longueur et d'aire; pour les applications de seconde catégorie, il faut faire usage d'un théorème relatif à la mesure des ensembles sur lequel j'ai, à diverses reprises, attiré l'attention ([1]).

La généralisation de M. Pierre Boutroux consiste essentiellement à tenir compte, dans l'exclusion des domaines avoisinant les points singuliers, de la condensation de ces points, lorsque cette condensation dépasse la moyenne; on augmente alors le domaine exclu et, par une analyse facile dans le cas d'une seule dimension, plus délicate dans le cas de plusieurs dimensions ([2]), on arrive à montrer que, dans les parties non exclues, la fonction se comporte *comme si la distribution des singularités était régulière*.

Ceci posé, il est clair que les applications de la méthode d'exclusion généralisée pourront aussi être divisées en deux catégories; M. Boutroux s'est borné jusqu'ici aux applications de la première catégorie; je voudrais, sans entrer dans le détail de la démonstration, donner un exemple des résultats que l'on peut obtenir dans les applications de la seconde catégorie.

Théorème. — *Soit $\mathfrak{G}(z)$ la dérivée logarithmique d'une fonction entière d'ordre ρ; on peut, dans tout angle aussi petit que l'on veut, tracer une infinité de droites telles que l'on ait, sur*

([1]) Depuis que ceci a été écrit, la définition que j'avais donnée de la mesure des ensembles a été universellement adoptée, ainsi que la définition de l'intégrale de M. Lebesgue qui lui est liée. Voir les livres où M. Lebesgue a exposé ses belles recherches sur la mesure et sur l'intégration, et aussi le livre de M. de la Vallée Poussin (**10, 11, 23**). En fait, c'est par la méthode d'exclusion que j'ai été conduit à étudier la mesure des ensembles et à modifier les définitions jusqu'alors adoptées.

([2]) M. Pierre Boutroux s'est borné au cas de *deux* dimensions; il n'y aurait pas de difficultés à étendre au cas de n dimensions ses ingénieuses considérations.

chacune d'elles.

$$|\varphi(z)| < A|z|^{[illegible]},$$

ε désignant un nombre positif arbitraire et A une constante.

Ce théorème pourrait d'ailleurs être généralisé et précisé par l'emploi des méthodes ingénieuses et profondes exposées dans la Thèse de M. Boutroux; je ne m'y étendrai pas. Remarquons, cependant, que la limitation ainsi obtenue *sur des droites* est nécessairement plus élevée que celle que l'on peut obtenir sur des courbes dont on ne précise pas l'allure, ou dans des aires indéfiniment éloignées. Par contre, la précision ainsi introduite dans l'énoncé paraît devoir présenter des avantages dans certaines applications.

Remarques sur les équations différentielles dont l'intégrale générale est une fonction entière [1].

Jusqu'à ces derniers temps, les équations différentielles connues admettant comme intégrale générale une fonction entière étaient assez peu nombreuses pour qu'il pût paraître inutile d'en tenter une étude systématique. Les méthodes de M. Painlevé lui ont permis de découvrir de nouvelles équations satisfaisant à cette condition et permettront sans doute d'en découvrir encore d'autres. On se trouve donc en présence d'une classe assez étendue d'équations différentielles, assurément très particulières, mais dont les propriétés simples doivent être nombreuses et intéressantes. Il semble qu'il y ait lieu d'aborder l'étude *directe* de cette classe d'équations que nous appellerons, pour abréger, *équations* (P). Les équations (P) sont donc *les équations différentielles dont l'intégrale $u(z)$ est une fonction entière de z, quelles que soient les constantes d'intégration* (ou conditions initiales).

L'étude directe des équations (P) paraît difficile; même dans les cas les plus simples, où on les intègre à l'aide des fonctions connues, il paraît malaisé de démontrer *directement* la convergence dans tout le plan du développement de Taylor de l'intégrale. Mais

---

[1] *Comptes rendus*, t. 138, 8 février 1904, p. 337.

il semble que cette étude promette d'être assez intéressante et assez féconde pour tenter plusieurs chercheurs : c'est pourquoi je me décide à publier quelques remarques élémentaires que j'ai faites sur les équations (P); bien qu'incomplètes, elles pourront peut-être mettre sur la voie de propriétés plus importantes et la question me paraît mériter que tous ceux qui s'y intéressent combinent leurs efforts pour l'élucider.

Je poserai

$$u(z) = u_0, \qquad \frac{du}{dz} = u_1, \qquad \frac{d^2u}{dz^2} = u_2, \qquad \frac{d^3u}{dz^3} = u_3, \qquad \ldots;$$

$$u_x^2 = u_0 x_1^2 + 2u_1 x_1 x_2 + u_2 x_2^2,$$

$$u_x^3 = u_0 x_1^3 + 3u_1 x_1^2 x_2 + 3u_2 x_1 x_2^2 + u_3 x_2^3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Les remarques que je veux résumer ici sont relatives *aux relations simples qu'il y a entre les équations* (P) *et les invariants des formes binaires* u_x^2, u_x^4, ... J'écrirai ces invariants sous la forme symbolique de Clebsch, en introduisant les variables symboliques v, w, s, identiques à u. Quant aux équations différentielles (P), je les écrirai sous la forme suivante : *le premier membre contiendra les termes dont le poids total par rapport aux* u_i *est le plus élevé*. L'importance particulière de ces termes est manifeste et résulte d'ailleurs des travaux de M. Painlevé.

Je signale d'abord quelques équations (P) dont l'intégrale générale s'obtient aisément et qui peuvent s'écrire :

$$(uv)^2 = u_0^2\,P(z) \qquad [P(z) \text{ polynome quelconque}];$$

$$(uv)^4 = A\,u_0^2 \qquad (A, \text{ constante});$$

$$(uv)^2 (vw)^2 (wu)^2 = 0.$$

Les premiers membres de ces équations sont les invariants des formes quadratique et biquadratique, de degrés 2, 2 et 3 et de poids 2, 4 et 6.

La fonction y, découverte par M. Painlevé et définie par l'équation

$$y'' = 6y^2 + z,$$

est la dérivée logarithmique seconde d'une fonction u vérifiant l'équation

$$(uv)^4 = u_0^2\,z.$$

De même, la fonction méromorphe y de M. Painlevé, définie par l'équation

$$y'' = 2y^3 + xy + \alpha,$$

peut être mise sous la forme du quotient de deux fonctions entières; la fonction dénominateur vérifie une équation différentielle du troisième ordre, dont le premier membre se réduit à l'invariant $(uv)^2(vs)^2(us)(sv)$ de la forme cubique u_x^3.

Il est inutile de multiplier les exemples pour se convaincre qu'il y a là un ensemble de faits analytiques dont la raison serait intéressante à connaître [1]. Hermite disait volontiers que « l'observation attentive des faits analytiques est la source la plus féconde des découvertes mathématiques »; le souvenir de ces paroles m'a encouragé à publier cette Note, bien qu'elle ne contienne que des faits, sans théorie qui les explique [2].

Sur l'indétermination des fonctions analytiques au voisinage d'un point singulier essentiel [3].

M. Harald Bohr a publié récemment (*Comptes rendus*, t. 154, p. 1078; *Journal de Crelle*, t. 141, p. 217) des résultats fort intéressants, relatifs à l'allure de la fonction $\zeta(s)$ et de fonctions qui s'y rattachent, lorsque la variable s décrit certaines droites. On peut se demander si ces résultats tiennent à la définition particulière de la fonction ou si, au contraire, ce sont des cas particuliers de propositions plus générales, concernant l'indétermination des fonctions analytiques au voisinage d'un point singulier essentiel.

Considérons, pour simplifier, une fonction entière $Z = F(z)$ et supposons que la variable z s'éloigne à l'infini suivant un chemin non singulier, une ligne droite pour fixer les idées; le point Z décrira une certaine courbe : *on doit regarder, comme étant le cas général, le cas où cette courbe remplit tout le plan*, c'est-à-dire passe une infinité de fois aussi près qu'on veut de tout point

---

(1) Il y aurait lieu de s'occuper aussi des *covariants* des formes binaires, des invariants et des covariants simultanés, etc.

(2) Aux résultats et aux méthodes de M. Painlevé se rattachent les travaux importants de MM. Chazy et Garnier sur les équations différentielles algébriques.

(3) *Comptes rendus*, t. 155, 16 juillet 1912, p. 201.

du plan. Si l'on remplace le plan par la sphère de Riemann, l'analogie est frappante avec les propriétés des trajectoires que Boltzmann appelait *ergodiques*.

Le problème qui se pose ensuite est la classification des cas d'exception, dans lesquels la trajectoire de Z tend vers une limite (finie ou infinie), ou est parcourue périodiquement une infinité de fois, ou admet des courbes asymptotes, ou remplit seulement certaines aires (comme dans les cas considérés par M. Bohr) : cette classification comprend d'ailleurs deux stades : classification des fonctions et classification des trajectoires.

On pourra consulter avec fruit, comme pouvant être rattachée à ces problèmes, une intéressante Note de M. Denjoy *Sur les fonctions entières d'ordre fini* [*Comptes rendus*, juillet 1907 (1)].

CONCLUSION.

On a trouvé dans les pages précédentes d'assez nombreux exemples de questions que je m'étais posées, sur lesquelles je m'étais proposé de revenir et que j'ai négligées pour d'autres travaux : *ars longa, vita brevis*. J'espère que quelques-unes au moins de ces questions seront reprises et résolues, malgré les difficultés qui résultent de l'extension croissante du champ de la théorie des fonctions ; une théorie comme celle des fonctions entières, qui existait à peine il y a cinquante ans, exige aujourd'hui du chercheur qui veut l'approfondir l'étude préalable de plusieurs livres ; et le nombre des problèmes à résoudre croît plus vite que le nombre des problèmes résolus. Ne sera-t-on pas submergé et que faut-il dès lors penser de l'avenir de la théorie des fonctions ? Je suis convaincu, pour ma part, que la Science ne peut se développer et même subsister que si le travail de simplification marche de pair avec l'extension croissante ; il faut organiser les conquêtes si l'on veut les conserver. Les ouvrages didactiques vraiment scientifiques ne sont pas moins utiles que les mémoires originaux.

En théorie des fonctions, la difficulté qui me paraît essentielle,

---

(1) Dans le même ordre d'idées, on peut prendre connaissance des articles de MM. Iversen et Valiron et surtout des résultats essentiels de M. Carleman.

et sur laquelle j'ai souvent insisté, est la distinction du possible et du réel. Les êtres possibles sont en infinité transfinie; on peut sans doute énoncer quelques théorèmes très généraux et créer quelques méthodes qui s'appliquent à *tous*, c'est-à-dire à *chacun* d'eux; mais leur étude détaillée et leur classification complète est inextricable, car nous ne pouvons pas atteindre effectivement, *toucher*, une infinité transfinie. Il faut donc se résigner à faire systématiquement ce que les mathématiciens ont été conduits à faire spontanément et sans esprit de système, c'est-à-dire se borner à étudier les fonctions qui se présentent *naturellement*, ce que nous pouvons appeler « les êtres réels et normaux », par opposition aux monstres artificiellement créés ou même simplement conçus abstraitement. La démarcation est délicate et, en certaines régions, ne serait pas actuellement facile à préciser; c'est néanmoins dans cette direction seulement que l'on arrivera à faire de la théorie des fonctions une discipline entièrement cohérente. Les fonctions anormales doivent être étudiées et connues dans une certaine mesure, mais seulement dans la mesure nécessaire pour les exclure ou plutôt pour reconnaître qu'elles s'excluent elles-mêmes du système cohérent.

Pour arriver à ce résultat, une étude approfondie et une classification des nombres incommensurables vraiment *définissables* s'impose tout d'abord; c'est là un sujet très difficile, mais dans lequel la moindre conquête est infiniment précieuse par ses répercussions; on atteint ici la substance vivante elle-même dont sont faits tous les êtres mathématiques; rien n'est plus important que les propriétés du nombre.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE III. — *La théorie de la croissance et le rôle des constantes arbitraires.*

CHAPITRE IV. — *Les fonctions de variable complexe, en général, et les fonctions particulières.*

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS et Cie, quai des Grands-Augustins, 55.

76624-25 Paris. — Imp. Gauthier-Villars et Cie, 55, Quai des Grands-Augustins